2025 年

成考专升本
高等数学（二）

黄金考点汇编

第一章　极限、连续

考点 1：函数的定义

定义：设 D 是一个非空实数集，f 是定义在 D 上的一个对应关系，若对于任意的实数 $x\in D$，都有唯一的实数 $y\in R$ 通过 f 与之对应，则 f 是定义在 D 上的一个函数，记作 $y=f(x),x\in D$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量.自变量的变化范围称为函数的**定义域**，所有函数值构成的集合 $\{y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的**值域**.

考点 2：三种常用特殊函数

1.**分段函数**：在定义域内不同区间上对应法则不同的解析式表示的函数，称为**分段函数**.

比如函数 $f(x)=\begin{cases}0,x\le 0\\ x^2,0<x\le 1\\ 3-x,x>1\end{cases}$ 是一个分段函数.

2.**隐函数**：设 x 在某个区间 D 内每取一个值时，在一定条件下，由方程 $F(x,y)=0$ 可唯一确定一个 y 的值，则称由 $F(x,y)=0$ 确定一个隐函数 $y=y(x)$.比如函数 $xy-3x^2y+y^4=1$ 是一个隐函数.

3.**参数方程确定的函数**：

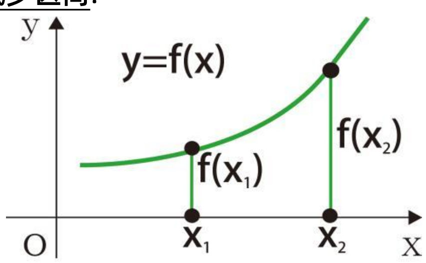
设 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$，若 x 在数集 D 内每取一个值时，由 $x=x(t)$ 可唯一确定一个 y 值，则称由参数方程确定了 y 为 x 的函数．比如函数 $\begin{cases}x=2\cos t\\ y=3\sin t\end{cases}$ 是一个由参数方程确定的函数.

考点 3：函数的性质

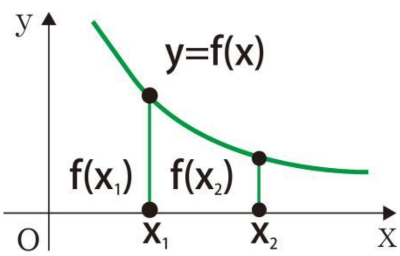
（1）函数的单调性

1.**增函数**：设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义，若对任给的 $x_1,x_2\in D$ 且 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 D 上单调增加，这时也称 $f(x)$ 是 D 上的**单调增加函数**，D 又称为函数 $f(x)$ 的**单调增加区间**.

2.**减函数**：设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义，若对任给的 $x_1,x_2\in D$ 且 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)>f(x_2)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 D 上单调减少，这时也称 $f(x)$ 是 D 上的**单调减少函数**，D 又称为函数 $f(x)$ 的**单调减少区间**.



增函数



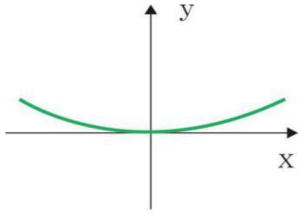
减函数

（2）函数的奇偶性

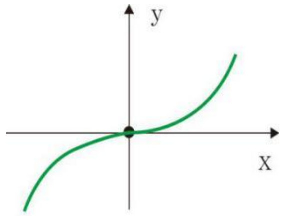
设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义，而且 D 关于坐标原点对称.

如果对任意的 $x \in D$，都有 $f(-x) = -f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 是区间 D 上的**奇函数**;

如果对任意的 $x \in D$，$f(-x) = f(x)$ 都成立，则称 $f(x)$ 是区间 D 上的**偶函数**.



偶函数



奇函数

【总结】①偶函数：$f(-x) = f(x)$，图形关于 y 轴对称；

②奇函数：$f(-x) = -f(x)$，图形关于坐标原点对称.

（3）函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义，若存在 $M > 0$，对于该区间内任意的 x 恒有 $|f(x)| \le M$，则称函数 $f(x)$ 在该区间内为**有界函数**.

【注意】函数的有界性是指函数值的有界性，而且有界性是相对的，在某个区域内是有界函数，在另一个区域也可能是无界函数，比如函数 $y = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上是无界的，但是在区间 $[0.001,1]$ 上是有界的，另外有界函数表示的是既有上界也有下界.

（4）函数的周期性：设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义，若存在 $T > 0$，对于任意的 $x \in D$ 有 $(x \pm T) \in D$，且恒有 $f(x \pm T) = f(x)$，则称函数 $y = f(x)$ 是周期函数，T 称为函数的周期.

使上述关系成立的最小正数为 T，称为函数 $f(x)$ 的最小正周期.

【注意】①并不是每个周期函数都有最小正周期，比如常数函数 $y = 2$ 是一个周期函数，它没有最小正周期；②周期函数的图像可由一个周期 T 内的图像左右平移得到.

考点 4：反函数

设 $f(x)$ 是定义在 D 上的**一一对应函数**，值域为 Z，若对应关系 g 使得对任意的 $y \in Z$，都有唯一的 $x \in D$ 与之对应，且称 g 是 f 的**反函数**.反函数也记作 $x = g(y) = f^{-1}(y)$.

【注意】①习惯上自变量用 x 表示，函数用 y 来表示，因此函数 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 通常用 $y = f^{-1}(x)$ 表示；②在同一直角坐标系中，函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称；③只有一一对应的函数才有反函数，比如 $y = x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上没有反函数，但当 $x \ge 0$ 时，$y = x^2$ 有反函数 $y = \sqrt{x}$.

考点 5：函数的四则运算与复合运算

（1）函数的四则运算

1.**加法运算：** $(f+g)(x)=f(x)+g(x), x\in D$　　2.**数乘运算：** $(kf)(x)=kf(x), x\in D$；

3.**乘法运算：** $(fg)(x)=f(x)g(x), x\in D$；　　4.**除法运算：** $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}, g(x)\neq 0, x\in D$.

【注意】如果做四则运算的函数定义域的交集为空集，此时四则运算没有意义，比如函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为 $[-1,1]$，函数 $g(x)=\sqrt{x^2-4}$ 的定义域为 $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$，显然 $f(x)+g(x)$ 没有意义.

（2）函数的复合运算

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=g(x)$ 的定义域为 D_g，且值域 $R_g\subset D_f$，则函数 $y=f[g(x)], x\in D_g$ 是一个由 $u=g(x)$ 和 $y=f(u)$ 构成的复合函数，函数的复合运算记作 $f\circ g$.

【注意】①不是所有的函数都可以构成复合函数，若要构成复合函数 $f\circ g$，则严格要求 $R_g\subset D_f$，否则不能构成复合函数.比如函数 $y=f(u)=\arcsin u, u\in D_f=[-1,1]$ 与函数 $u=g(x)=2+x^2, x\in D_g=\mathbf{R}$ 不能复合，因为 $R_g\not\subset D_f$. ②复合函数可以由多个函数复合而成，比如 $y=\cos\sqrt{x^2-1}$.

考点 6：基本初等函数

（1）幂函数

定义： 形如 $y=x^{\alpha}$（α 为有理数）的函数，即以**底数**为自变量，**幂**为因变量，指数为常数的函数称为**幂函数**，所有的幂函数都过点 $(1,1)$.

性质： 1.$\alpha>0$ 时，幂函数在第一象限内为增函数，比如函数 $y=x, y=x^2, y=x^{\frac{1}{2}}$；

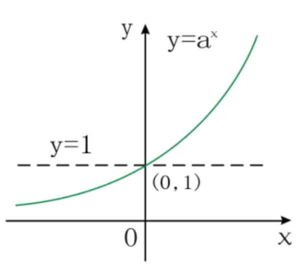
2.$\alpha<0$ 时，幂函数在第一象限内为减函数，比如函数 $y=x^{-1}, y=x^{-2}$.

（2）指数函数：定义： 函数 $y=a^x\ (a>0, a\neq 1)$ 称为以 a 为底的**指数函数**，常用的是以无理数 e 为底的指数函数 $y=e^x$.

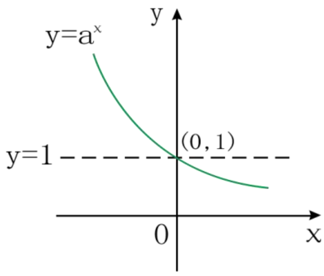
性质： 1.函数 $y=a^x\ (a>0, a\neq 1)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $(0,+\infty)$；

2.当 $a>1$ 时是单调**增函数**，当 $0<a<1$ 时是单调**减函数**；

3.图像恒过 $(0,1)$ 点，指数函数是非奇非偶函数.



$y=a^x\,(a>1)$



$y=a^x\,(0<a<1)$

【注意】有理数指数幂运算法则 $(a>0,a\neq 1)$：

① $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$	② $\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$
③ $(a^x)^y=(a^y)^x=a^{xy}$	④ $(ab)^x=a^xb^x$
⑤ $a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}$	⑥ $a^{\frac{x}{y}}=\sqrt[y]{a^x}$

（3）对数函数

定义：函数 $y=a^x$ 的反函数称为以 a 为底的**对数函数**，记作 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$，常用的是以实数 10 为底的对数函数 $y=\lg x$ 以及无理数 e 为底的对数函数 $y=\ln x$.

$$y=\log_{\boxed{a}}\boxed{x}$$

真数

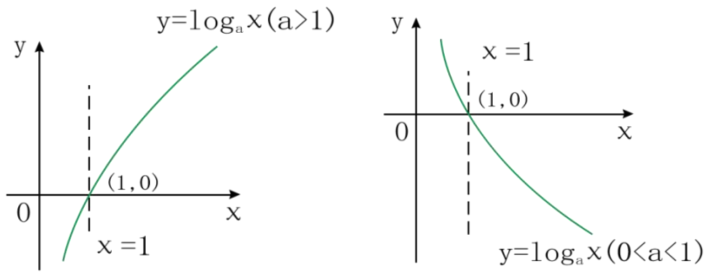
底数

性质：

1.函数 $y=\log_a x\ (a>0,a\neq 1)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，值域是 $(-\infty,+\infty)$；

2.当 $a>1$ 时是单调**增函数**，当 $0<a<1$ 时是单调**减函数**；

3.图像恒过点 $(1,0)$，对数函数是非奇非偶函数.



【注意】对数运算恒等式：

① $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$	② $\log_a\dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$
③ $\log_a x^r=r\log_a x$	④ $\log_a a=1$
⑤ $\log_a 1=0$	⑥ $a^{\log_a x}=x$

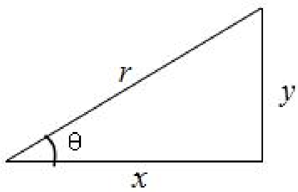
（4）三角函数

1.锐角三角函数与直角三角形中三边的关系：

正弦函数 $\sin\theta=\dfrac{y}{r}$；**余弦函数** $\cos\theta=\dfrac{x}{r}$；

正切函数 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$；**余切函数** $\cot\theta=\dfrac{x}{y}$；

正割函数 $\sec\theta=\dfrac{r}{x}$；**余割函数** $\csc\theta=\dfrac{r}{y}$.

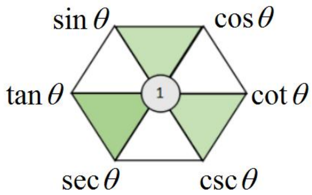


2.**三角函数中常用的相关公式：**

①**平方关系：** $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$，$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$；

②**商的关系：** $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$；

③**倒数关系：** $\tan\theta\cdot\cot\theta=1$，$\sin\theta\cdot\csc\theta=1$，$\cos\theta\cdot\sec\theta=1$.



④**倍角公式：**

$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$，$\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=1-2\sin^2\theta=2\cos^2\theta-$

3.常用三角函数

①函数 $y=\sin x$ 是**正弦函数**，奇函数，定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $[-1,1]$，周期为 2π；

②函数 $y=\cos x$ 是**余弦函数**，偶函数，定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $[-1,1]$，周期为 2π；

③函数 $y=\tan x$ 是**正切函数**，奇函数，定义域为 $\{x\mid x\in\mathbf{R},x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，值域为 $\mathbf{R}$，周期为 π.

（5）反三角函数

1.常用反三角函数

①函数 $y=\arcsin x$ 是 $y=\sin x$ 在区间 $[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$ 上的**反正弦函数**，定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$；

②函数 $y=\arccos x$ 是 $y=\cos x$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的**反余弦函数**，定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[0,\pi]$；

③函数 $y=\arctan x$ 是 $y=\tan x$ 在区间 $(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 上的**反正切函数**，定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$.

2.反三角函数的性质

①反正弦函数 $y=\arcsin x$ 在定义域内是单调增加的有界函数，是奇函数；

②反余弦函数 $y=\arccos x$ 在定义域内是单调减少的有界函数，是非奇非偶函数；

③反正切函数 $y=\arctan x$ 在定义域内是单调增加的有界函数，是奇函数.

【小结】以上五种函数与常数函数统称为基本初等函数，由基本初等函数经过有限次四则运算与有限次复合运算后能用一个解析式表达的函数称为初等函数.

考点 7：数列极限

（1）数列： 若按照某一法则，对每个 $n\in N_+$，对应着一个确定的实数 a_n，这些实数 a_n 按下标 n 由小到大顺序排列得到一个序列 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，该序列称为数列，记作 $\{a_n\}$，其中 a_n 称为该数列的**通项**.

（2）数列极限： 设 $\{a_n\}$ 为数列，a 为常数，若对任意的正数 ε（不论它多么小），总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，有 $|a_n-a|<\varepsilon$，则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，常数 a 称为数列的极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$

【注意】若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则对于数列 $\{x_n\}$ 的任意子数列 $\{x_{n_k}\}$ 都有 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$.若数列 $\{x_n\}$ 有一个子数列极限不存在，或有两个子数列极限存在但不相等，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

（3）数列极限的性质

1.唯一性：数列极限的结果是**唯一**的；

2.有界性：收敛数列必有界；

3.**夹逼定理**：任意三个数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$、$\{z_n\}$，从某项开始，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $x_n \le y_n \le z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$，则必有 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$；

4.单调有界性：**单调有界数列**必有极限；

5.四则运算法则：若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，则有：

① $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha A + \beta B$（$\alpha,\beta$ 为常数）；② $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = AB$；③ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B}(B\ne 0)$.

考点 8：函数在 $x\to x_0$ 时的极限

（1）函数在一点的极限

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内有定义，当 x"无限趋于" x_0 时，其对应函数值 $f(x)$"无限趋于"一个确定的数 A，则称函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的**极限**是 A，此极限记作 $\lim f(x)=A.$

（2）函数在一点的左，右极限

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的左侧附近有定义，若当 $x<x_0$ 且"无限趋于" x_0 时，其对应的函数值 $f(x)$"无限趋于"一个确定常数 A，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点的**左极限**是 A，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$

类似地，我们可以将函数 $f(x)$ 在 x_0 点的**右极限**是 B，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=B$

（3）函数在一点处有极限与左、右极限的关系

设函数 $f(x)$ 在 x_0 点附近有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的**充分必要条件**是：$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$.

考点 9：函数在无穷远的极限

函数在 $x\to\infty$ 时的极限： 函数 $f(x)$ 在 $x\to\infty$ 时的极限是 A，记作 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$.趋于无穷远处的极限类似于趋于某一点处的极限，对于无穷远可以分为正无穷远处和负无穷远处，当且仅当函数趋于正无穷远处以及负无穷远处的极限都存在时，才能得到 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$.

比如 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}, \lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$，故 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

【注意】当 $x\to\infty$ 时，对于求分子分母为关于 x 的同阶多项式的极限有一个重要结论：极限值等于最高次幂的系数之比，比如 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+1}{4x^2+x}=\frac{3}{4}, \lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^5-2x^3+x}{2x^5-x^4-x+1}=2$.此方法被称为"抓大头"的思想.

考点 10：函数极限的运算

（1）极限的四则运算

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，则：1. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$

2. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=AB$ $\left((\lim\limits_{x\to x_0})kf(x)=kA, k\in R\right)$； 3. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

（2）夹逼定理

对于 x_0 的某一去心邻域内的一切 x，都有：

1. $g(x)\le f(x)\le h(x)$， 2. $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$， $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，则有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$

（3）两个重要极限

1.**重要极限（I）**：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$； 2.**重要极限（II）**：$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$.

【注意】1.对于重要极限（II），它也可以记作 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

2.对于两个重要极限，要知道，自变量 x 可以是任意的变量，比如，当 $x\to 0$ 时，$x^2\to 0$ 也成立，因此 $\lim\limits_{x^2\to 0}\dfrac{\sin x^2}{x^2}=1$ 也成立.

考点11：无穷小量与无穷大量的概念

（1）无穷小量的概念：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，则称函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时是一个**无穷小量**，

【注意】①无穷小与有界量的乘积仍然是无穷小量，例如 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$；

②无穷小量与无穷大量在形式上互为倒数.

（2）无穷大量的概念：若函数 $\dfrac{1}{f(x)}$ 在 $x\to x_0$ 时是一个无穷小量，则称函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时是一个**无穷大量**，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

1.当 x 无限趋于 x_0 时，若 $\dfrac{1}{f(x)}>0$ 且无限趋于 0，则称函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时是一个**正无穷大量**，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$；

2.当 x 无限趋于 x_0 时，若 $\dfrac{1}{f(x)}<0$ 且无限趋于 0，则称函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时是一个**负无穷大量**，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$.

考点12：无穷小量的比较

设 $f(x),g(x)$ 都是 $x\to x_0$ 时的无穷小量，且 $g(x)$ 在 x_0 的去心邻域内不为零.

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c$，则

1.当 $c=0$ 时，称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的**高阶无穷小量**，记作：$f(x)=o(g(x))\ (x\to x_0)$

2.当 $c \neq 0$ 且 $c \neq 1$ 时，称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x \to x_0$ 时是<u>**同阶无穷小量**</u>；

3.当 $c=1$ 时，称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x \to x_0$ 时是<u>**等价无穷小量**</u>，记作： $f(x) \sim g(x)\ (x \to x_0)$

极限 x 趋于 0 时的等价无穷小量

常用等价无穷小替换公式		
① $\sin x \sim x$	② $\tan x \sim x$	③ $\arcsin x \sim x$
④ $\arctan x \sim x$	⑤ $e^x - 1 \sim x$	⑥ $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$
⑦ $a^x - 1 \sim x\ln a$	⑧ $\ln(1+x) \sim x$	⑨ $x-\ln(1+x) \sim \frac{1}{2}x^2$
⑩ $\sqrt{1+x}-1 \sim \frac{1}{2}x$	⑪ $\tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3$	⑫ $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x} \sim x$

【注意】等价无穷小替换公式适用于所有满足此关系的式子，比如 $x \to \infty$ 时可得 $\frac{1}{x} \to 0$，依然有 $\sin\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$； $x^3 \to 0$ **时，** $1-\cos(x^3) \sim \frac{1}{2}(x^3)^2$**.**

考点 13：函数的连续与间断

（1）函数在一点连续的概念：设函数 $f(x)$ 在 x_0 及其附近有定义，若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续， x_0 称为函数 $f(x)$ 的<u>**连续点**</u>.

（2）左连续、右连续

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)[\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)]$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续（或右连续）.当且仅当函数在一点处的左右极限都等于函数值时，函数在该点处才连续.

（3）函数间断点的定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，在此前提下，如果函数 $f(x)$ 有下列三种情形之一：

1.在点 $x = x_0$ 处没有定义；

2.虽在 $x = x_0$ 处有定义，但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在；

3.虽在 $x = x_0$ 处有定义，且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，且点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的<u>**间断点**</u>或<u>**不连续点**</u>.

【注意】由于一切初等函数在其定义区间内皆连续，所以初等函数的间断点往往是无定义的点；对分段函数来说，间断点往往是分段点；当然这些点具体是不是间断点还要从连续的三个条件判断，这三个条件有一个不满足，即可认为该点为函数的间断点.

（4）间断点的分类

1.**第一类间断点：**若 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点，且左极限 $f(x_0^-)$ 及右极限 $f(x_0^+)$ 都存在，那么称 x_0 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点.

①在第一类间断点中，若 $f(x_0^-)=f(x_0^+)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则称 x_0 为**可去间断点**.

②在第一类间断点中，若 $f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$，则称 x_0 为**跳跃间断点**.

2.**第二类间断点：**不是第一类间断点的任何间断点，称为第二类间断点.

①当 $x\to x_0^-$ 或 $x\to x_0^+$ 时，函数 $f(x)\to\infty$，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的**无穷间断点**.

②当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限不存在，呈上下振荡情形，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的**振荡间断点**.

（5）函数连续的性质

1.设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 处连续，则它们的和（差）$f\pm g$、积 $f\cdot g$ 及商 $\frac{f}{g}$（当 $g(x_0)\neq 0$ 时）都在点 x_0 处连续；

2.设函数 $y=f[g(x)]$ 由函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=g(x)$ 复合而成，$U(x_0)\subset D_{f\circ g}$.若函数 $u=g(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，且 $g(x_0)=u_0$，而函数 $y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 处连续，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 在 $x=x_0$ 处也连续.

（6）闭区间上连续函数的性质

1.**最大值和最小值定理**：如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上必定取得最大值和最小值；

2.**有界性定理**：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上必有界；

3.**介值定理**：设函数在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在这区间的端点取不同的函数值 $f(a)=A$ 及 $f(b)=B$，则对于 A 和 B 之间的任意一个数 C，在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=C(a<\xi<b)$.

推论 1：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，M 和 m 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值，则对于满足 $m<\mu<M$ 的任何实数 μ，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\mu$；

推论 2（**零点定理**）：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号（即 $f(a)f(b)<0$），则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=0$.

（7）初等函数的连续性

1.基本初等函数在其定义域内为连续函数；2.初等函数在其定义区间内为连续函数.

第二章　一元函数的微分学

考点 14：导数的概念

（1）函数在一点处的导数定义

1.设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 及其附近有定义，如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，则称函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，极限的值称为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的**导数**，记作 $f'(x)$，$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$ 或 $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$ 等

2.**导数的定义式**：$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 或 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

（2）左导数与右导数

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其左侧邻域内有定义，当 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在时，则称该极限值为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的**左导数**，记为 $f'_-(x_0)$，即 $f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

同理，定义**右导数**为 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导的充分必要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右导数都**存在且相等**，即 $f'(x_0)=f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.

（3）导数的几何意义

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处必定存在切线，且该切线的斜率为 $f'(x_0)$，即函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,f(x_0))$ 处的切线斜率，即 $f'(x_0)=\tan\alpha$，其中 α 是切线的倾斜角.函数 $y=f(x)$ 在某点处的导数、曲线 $y=f(x)$ 在某点处的切线的斜率和倾斜角的正切值，以上三者是可以互相转化的.

根据导数的几何意义并应用直线的点斜式方程，可知曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的**切线方程**为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

如果 $f'(x_0)\neq 0$，则此曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的**法线方程**为 $y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$

若 $f'(x_0)=0$，则切线方程为 $y=f(x_0)$，法线方程为 $x=x_0$.

若 $f'(x_0)=\infty$，则函数在该点处的导数不存在，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线垂直于 x 轴，即切线方程为 $x=x_0$，法线方程为 $y=f(x_0)$.

（4）可导与连续的关系：如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

【注意】 $f(x)$ 在点 x_0 处连续不等价于 $f(x)$ 在点 x_0 处可导.例如，$y=|x+1|$ 在 $x=-1$ 处连续但不可导，故可导一定连续，连续不一定可导.

考点 15：微分的概念

（1）函数在一点处的微分

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 及其附近有定义，如果函数值 $f(x)$ 在点 x_0 处的改变量 $\Delta f(x)$ 可以表示成自变量改变量的一次项 $a(x_0)\Delta x$ 与自变量改变量的高阶无穷小量 $o(\Delta x)$ 之和，即 $\Delta f(x_0)=a(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$

则函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可微，$a(x_0)\Delta x$ 称为 $f(x)$ 在 x_0 处的微分.

函数的微分表达式：$df(x)=f'(x)dx$.

（2）可导与可微的关系

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，即可导与可微等价且有 $dy|_{x=x_0}=f'(x_0)\Delta x=f'(x_0)dx$.

考点16：基本导数公式

基本初等函数求导公式（重要公式，重点记忆）

1.**常数函数**的导数：$(C)'=0$；

2.**幂函数**的导数：$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$，$(\sqrt[n]{x^m})'=(x^{\frac{m}{n}})'=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$；

3.**指数函数**的导数：$(a^x)'=a^x\ln a$，$(e^x)'=e^x$；

4.**对数函数**的导数：$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$，$(\ln x)'=\frac{1}{x}$；

5.**三角函数**的导数：$(\sin x)'=\cos x$，$(\cos x)'=-\sin x$；$(\tan x)'=\sec^2 x$，$(\cot x)'=-\csc^2 x$；

$(\sec x)'=\sec x\tan x$，$(\csc x)'=-\csc x\cot x$；

6.**反三角函数**的导数：$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，

$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$，$(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

考点17：导数运算（重要公式，重点记忆）

若函数 u,v 在 x_0 处可导，则其和、差、积、商构成的函数均在 x_0 处可导.

1. $(u\pm v)'=u'\pm v'$；

2. $(uv)'=u'v+uv'$，进一步有 $(Cv)'=Cv'$（C 为常数）；

3. $(\frac{u}{v})'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\ (v\neq 0)$.

考点18：复合函数的链式求导法则

设函数 $y=f(g(x))$ 是函数 $y=f(u),u=g(x)$ 的**复合**.若 $g(x)$ 在 x_0 处可导，$f(u)$ 在 $u_0=g(x_0)$ 处可导，则函数 $y=f(g(x))$ 关于 x 在 x_0 处的导数为 $\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}=f'(u_0)g'(x_0)=f'(g(x_0))g'(x_0)$

考点19：复合函数的微分

如果函数 $y=f(u)$ 可微，函数 $u=u(x)$ 也可微，则复合函数 $y=f[u(x)]$ 的微分 $dy=f'(u)\cdot u'(x)dx$ 或记作 $dy=f'(u)du$　这个结论称为**一阶微分形式不变性**.

考点20：特殊函数的求导法

（1）对数求导法： 对于形如 $y=f(x)^{g(x)}$ 的幂指函数，可运用对数求导法求导

（2）反函数的导数

如果函数 $x=\varphi(y)$ 在某一区间单调、可导，且 $\varphi'(y)\neq 0$，则它的反函数 $y=f(x)$ 在对应区间内也可导，且 $f'(x)=\dfrac{1}{\varphi'(y)}(\varphi'(y)\neq 0)$，或记为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$，即反函数的导数等于**原导数的倒数**.

（3）隐函数的求导方法

根据复合函数的求导法则，若有 $y=y(x)$，可得 $[g(y)]'_x=g'(y)\dfrac{dy}{dx}$，故可以确定隐函数中的导数.

另外，在后续内容的多元函数微分学中我们将会学习隐函数求导的公式法求解隐函数的导数.

考点 21：高阶导数

（1）概念： 函数 $f(x)$ 的一阶导数 $f'(x)$ 的导数为二阶导数，记作 $f''(x)$；二阶导数的导数为三阶导数，记作 $f^{(3)}(x)$；……；n 阶导数：$f^{(n)}(x)=[f^{(n-1)}(x)]'$ 或 $\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}=\dfrac{d}{dx}[\dfrac{d^{n-1}f(x)}{dx^{n-1}}]$.

一般地，二阶及以上的导数统称为**高阶导数**.

考点 22：基于未定式“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型的极限

洛必达法则： 当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时，函数 $f(x),g(x)$ 都趋于**零或无穷大**，在点 x_0 的某个去心邻域内，$f'(x),g'(x)$ 都存在，$g'(x)\neq 0$，且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，则：$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

【注意】对于 $\frac{0}{0}$ 型的未定式求极限问题，可以使用洛必达法则以及等价无穷小替换相结合地求解，另外若使用一次洛必达法则后仍然是未定式，可以继续使用洛必达法则，直到求得一个确定的常数.

考点 23：函数单调性

单调性判定定理： 通过判断函数导数的**正负**来判断函数的增减性.

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导：

1.若在 (a,b) 内 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调**增加**；

2.若在 (a,b) 内 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调**减少**.

考点 24：函数的极值

（1）极值与极值点的定义

1.设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，对于邻域内（除点 x_0 外）的任意一点 x 均有 $f(x)<f(x_0)$（或 $f(x)>f(x_0)$），则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的极大值（或极小值），称 x_0 是函数 $f(x)$ 的极大值点（或极小值点）；

2.**极值**包括极大值和极小值，极值点包括极大值点和极小值点；

3.凡是使 $f'(x_0)=0$ 的点 x_0，称为函数 $f(x)$ 的**驻点**.

（2）函数极值点的判定定理

1.**第一判定定理**：设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的邻域可导，且 $f'(x_0)=0$.

	左侧邻近值	右侧邻近值
极大值	$f'(x_0)>0$	$f'(x_0)<0$
极小值	$f'(x_0)<0$	$f'(x_0)>0$

2.**第二判定定理**：函数 $f(x)$ 在 x_0 有**二阶导数**，且 $f'(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0$，则

①函数 $f(x)$ 在 x_0 点取极大值，$f''(x)<0$；　②函数 $f(x)$ 在 x_0 点取极小值，$f''(x)>0$；

【注意】① x_0 为 $f(x)$ 的极值点不可推 x_0 为 $f(x)$ 的驻点（也可能是不可导点）.例如 $y=|x|, x=0$ 是函数的极值点，但它并不是函数的驻点，而是不可导点；

② x_0 为 $f(x)$ 的驻点不可推 x_0 为 $f(x)$ 的极值点.例如 $f(x)=x^3, f'(x)=3x^2=0$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的驻点，但 $f'(x)$ 在 $x=0$ 的去心邻域内恒大于 0，所以 $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点；

③求函数单调性和极值的一般步骤如下：

a.确定函数 $f(x)$ 的定义域；

b.求导数 $f'(x)$；

c.求出 $f'(x)=0$ 的点和 $f'(x)$ 不存在的点；

d.以上述点为分点将定义域分成若干个部分区间，并列表讨论 $f'(x)$ 在各个区间内的符号确定单调性，从而确定函数的极值和极值点.

（3）函数最值的判定方法

在实际生活中我们经常会遇到求某一函数的最值问题，下面我们讨论不同情况下的最值情况.

1.函数 $y=f(x)$ 在开区间内的最值

定理：设函数 $y=f(x)$ 在某开区间 (a,b) 内只有一个极值点 x_0，那么：

①如果点 x_0 为极大值点，则唯一极大值点也是函数 $f(x)$ 在该区间的最大值点；

②如果点 x_0 为极小值点，则唯一极小值点也是函数 $f(x)$ 在该区间的最小值点.

开区间内的可导函数不一定有最值.当 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调递增或单调递减时，$f(x)$ 无最值，当 $f(x)$ 满足定理的条件，那么可导函数存在最值，则求函数 $f(x)$ 在开区间最值的步骤如下：

①求 $f'(x)$，并令 $f'(x)=0$，得到唯一的驻点；

②判断 $f''(x)$ 的符号确定极值点，由定理得到最值点，进而得到最值.

2.函数 $y=f(x)$ 在闭区间上的最值

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必能取得最值.

【注意】求函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上最值的一般步骤是：

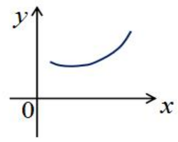
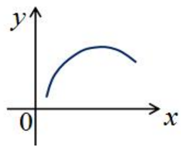
①求出函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内的所有驻点和 $f'(x)$ 不存在的点；

②求出①中所有点的函数值和端点的函数值；

③比较这些函数值的大小，其中函数值最大的就是函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值，函数值最小的就是函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值.

考点 25：曲线凹凸性的定义

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续，且具有二阶导数，若对任意 x_1，$x_2\in(a,b)$.

凹凸性	二阶导数	函数值	图像
① $f(x)$ 在区间 (a,b) 内图形是**凹**的	$f''(x)>0$	$f(\frac{x_1+x_2}{2})\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$	
② $f(x)$ 在区间 (a,b) 内图形是**凸**的	$f''(x)<0$	$f(\frac{x_1+x_2}{2})\ge\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$	

考点 26：拐点的定义

连续函数上，曲线在点 M 的两侧有不同的凹凸性，则称 M 点为曲线上的<u>**拐点**</u>.

【注意】求函数拐点的一般步骤：

①确定函数的定义域；

②求出 $f''(x)=0$ 的点和 $f''(x)$ 不存在的点；

③以上述点为分点将定义域分成若干个部分区间，并讨论 $f''(x)$ 在各个区间内的符号，从而确定函数的凹凸区间和拐点.

考点 27：曲线的渐近线

（1）水平渐近线

设有曲线 $y=f(x)$，那么有

1.如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$，则称直线 $y=a$ 是曲线趋于 $+\infty$ 的水平渐近线；

2.如果 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$，则称直线 $y=a$ 是曲线趋于 $-\infty$ 时的水平渐近线；

3.如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$，则称直线 $y=a$ 是曲线趋于 ∞ 时的水平渐近线.

（2）铅直渐近线

设有曲线 $y=f(x)$.如果存在常数 c，使得 $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to c+} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$，那么直线

$x=c$ 称为曲线 $y=f(x)$ 的**铅直渐近线**（又叫垂直渐近线）.

第三章　一元函数的积分学

考点 28：原函数与不定积分

（1）原函数的定义

若区间 I 上存在任意 x 满足 $F'(x)=f(x)$（或 $dF(x)=f(x)dx$），则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的**原函数**.

【注意】①若函数 $F(x),G(x)$ 都是函数 $f(x)$ 在某区间内的原函数，则 $F(x)-G(x)=a$（a 为某个确定常数），即同一函数的原函数相互之间相差一个常数；

②设函数 $f(x)$ 在某区间内连续，则函数 $f(x)$ 在该区间内的原函数一定存在.由于初等函数在其定义区间上为连续函数，因此初等函数在其定义区间上的原函数必定存在.

（2）不定积分的定义：称全体原函数 $F(x)+C$ 为 $f(x)$ 的**不定积分**，记为 $\int f(x)dx$，

$$\int f(x)dx=F(x)+C \text{（}C\text{ 为任意常数）}$$

考点 29：不定积分基本性质

1.设 k 是不为零的常数，则 $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$；

2.$\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$；

3.$[\int f(x)dx]'=f(x) \Leftrightarrow d[\int f(x)dx]=f(x)dx$；

4.$\int F'(x)dx=F(x)+C$.

考点 30：基本积分公式

常用的基本积分公式	
① $\int 0\,dx=C$	② $\int x^{\alpha}dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C(\alpha\neq-1)$
③ $\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+C(a>0,a\neq1)$	④ $\int e^{x}dx=e^{x}+C$
⑤ $\int\cos xdx=\sin x+C$	⑥ $\int\sec^{2}xdx=\int\frac{1}{\cos^{2}x}dx=\tan x+c$
⑦ $\int\csc x\cot xdx=-\csc x+C$	⑧ $\int\csc^{2}xdx=\int\frac{1}{\sin^{2}x}dx=-\cot x+C$
⑨ $\int\frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+C$	⑩ $\int\sin xdx=-\cos x+C$
⑪ $\int\sec x\tan xdx=\sec x+C$	⑫ $\int\frac{1}{1+x^{2}}dx=\arctan x+C$
⑬ $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}dx=\arcsin x+C$	⑭ $-\int\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}dx=\arccos x+C$

考点 31：第一换元积分法定义及其常考公式

1.设函数 $f(u)$ 有原函数 $F(u),u=\varphi(x)$ 可导，则有**第一换元积分**公式：

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=F[\varphi(x)]+C$$

2.若 $\int f(u)du=F(u)+C$，用第一换元积分法求不定积分时，以下凑微分常出现：

① $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)=\frac{1}{a}F(ax+b)+C(a\neq 0)$
② $\int f(x^\alpha)x^{\alpha-1}dx=\frac{1}{a}\int f(x^\alpha)d(x^\alpha)=\frac{1}{a}F(x^\alpha)+C\,(\alpha\neq 0)$
③ $\int f(e^x)e^xdx=\int f(e^x)d(e^x)=F(e^x)+C$
④ $\int f(\ln x)\frac{1}{x}dx=\int f(\ln x)d(\ln x)=F(\ln x)+C$
⑤ $\int f(\sin x)\cos xdx=\int f(\sin x)d(\sin x)=F(\sin x)+C$
⑥ $\int f(\cos x)\sin xdx=-\int f(\cos x)d(\cos x)=-F(\cos x)+C$
⑦ $\int f(\tan x)\sec^2 xdx=\int f(\tan x)d(\tan x)=F(\tan x)+C$
⑧ $\int f(\cot x)\csc^2 xdx=-\int f(\cot x)d(\cot x)=-F(\cot x)+C$
⑨ $\int f(\arctan x)\frac{1}{1+x^2}dx=\int f(\arctan x)d(\arctan x)=F(\arctan x)+C$
⑩ $\int f(\arcsin x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int f(\arcsin x)d(\arcsin x)=F(\arcsin x)+C$

考点 32：第二换元积分法的基本类型

1.三角代换：若被积函数中含有根式 $\sqrt{a^2-x^2}$ 或 $\sqrt{x^2\pm a^2}(a>0)$，可用“三角代换”：

①对于 $\sqrt{a^2-x^2}$，令 $x=a\sin t(-\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2})$ 或 $x=a\cos t(0\leq t\leq\pi)$；

②对于 $\sqrt{x^2+a^2}$，令 $x=a\tan t(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2})$；

③对于 $\sqrt{x^2-a^2}$，令 $x=a\sec t(0\leq t<\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{2}<t<\pi)$.

2.**根式代换：**当被积函数含有根式 $\sqrt[n]{ax+b}$ $(a\neq 0)$ 时，通过换元公式令 $\sqrt[n]{ax+b}=t$，可以将根号去掉，变量代换为 $x=\frac{1}{a}(t^n-b)$.

考点 33：利用分部积分法计算不定积分

设函数 $u=u(x),v=v(x)$ 的导数都存在且连续，则有 $\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx$

简写可以记为 $\int udv=uv-\int vdu$.此方法称为分部积分法.

考点 34：有理函数的积分与计算方法

两个多项式的商 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 称为有理函数，我们总假定分子多项式 $P(x)$ 与分母多项式 $Q(x)$ 之间没有公因式，当分子多项式 $P(x)$ 的次数小于分母多项式 $Q(x)$ 的次数时，称这个有理函数为真分式，否则称为假分式.利用多项式的除法，总可以将一个假分式化成一个多项式与一个真分式之和的形式，比如 $\frac{2x^4+x^2+3}{x^2+1}=2x^2-1+\frac{4}{x^2+1}$.

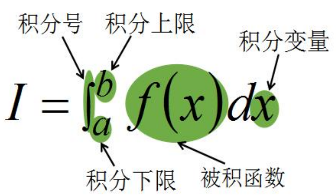
对于真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$，如果分母可以分解为两个多项式的乘积，即 $Q(x)=Q_1(x)\cdot Q_2(x)$.若 $Q_1(x),Q_2(x)$ 没有公因式，那么它可以拆分为两个真分式的和，即 $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$，此步骤称为把真分式化为部分分式和.若 $Q_1(x)$ 或 $Q_2(x)$ 还能分解为两个没有公因式的多项式乘积，那么就可再拆分成更简单的部分分式.最后有理函数的分解式中只含有多项式，$\frac{P_1(x)}{(x-a)^k},\frac{P_2(x)}{(x^2+px+q)^l}$ 等三类函数，其中 $p^2-4q<0,P_1(x)$ 为小于 k 次的多项式，$P_2(x)$ 为小于 $2l$ 次的多项式.

考点 35：定积分的定义

设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，在区间 $[a,b]$ 中任取分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$.将区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1},x_i]$，小区间的长度为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$，在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i，作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的和：$\sum^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

记 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$，如果不论对区间 $[a,b]$ 采取何种分法以及 ξ_i 如何选取，当 $\lambda\to 0$ 时，和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限总存在，则此极限称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的**定积分**，记作 $\int_a^b f(x)dx$，即 $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

其中，a 与 b 分别叫作积分的**下限**和**上限**，$[a,b]$ 叫作**积分区间**.



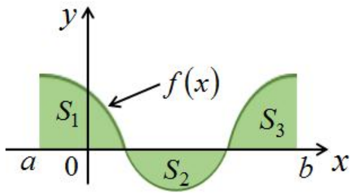
【注意】①定积分的大小只与被积函数 $f(x)$ 及积分区间 $[a,b]$ 有关，与积分变量的符号 x 无关，改变函数自变量的字母不改变定积分的值，即 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du$；

②若函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上恒等于 1，那么 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b 1dx=b-a$；

③由定积分定义可知 $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)dx$，$\int_a^a f(x)dx=0$.

考点 36：定积分的几何意义

函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分表示为直线 $x=a,x=b,y=0$ 所围成的几个曲边梯形的**面积代数和**. $\int_a^b f(x)dx=S_1-S_2+S_3$



考点 37：定积分的性质

1. $\int_a^b[f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$；

2. $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$；

3.积分区间的可加性：$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$；

4.奇函数 $f(x)$ 在对称区间上的定积分为 0，即 $\int_{-a}^a f(x)dx=0$；

5.偶函数 $f(x)$ 在对称区间上的定积分为 $\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$；

6.若在区间 $[a,b]$ 上有 $f(x)\le g(x)$，则 $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$；

7.估值定理：设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值及最小值，则

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)\qquad(a<b)$$

8.积分中值定理：如果函数 $f(x)$ 在积分区间 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 上至少存在一个点 ξ，使下式成立：$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)\qquad(a\le\xi\le b)$，这个公式叫作**积分中值公式**.

考点 38：定积分的存在定理

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 必定存在.

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，且只有有限个间断点，则定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 必定存在.

考点 39：变上限函数的定义

1.若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 是可微的，则 $\frac{d}{dx}(\int_a^{g(x)}f(t)dt)=f[g(x)]g'(x)$

2.若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且积分上、下限都是 x 的可微函数，则

$$\frac{d}{dx}(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)}f(t)dt)=f[\varphi(x)]\varphi'(x)-f[\psi(x)]\psi'(x)$$

【注意】连续函数 $f(x)$ 取变上限 x 的定积分然后求导，其结果还为 $f(x)$ 本身.联想到原函数的定义，就可以推知 $\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数.因此，我们引出如下的原函数的存在定理：

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则函数 $\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

此定理的意义是：一方面肯定了连续函数的原函数是存在的，另一方面初步地揭示了积分学中的定积分与原函数之间的联系.因而，我们就有可能通过原函数来计算定积分.

考点40：牛顿--莱布尼茨公式

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $F'(x)=f(x)$，则有**牛顿--莱布尼茨公式**：$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

为了方便书写，我们可以把公式记作：$\int_a^b f(x)dx=F(x)|_a^b$

考点41：定积分的换元积分法

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，函数 $x=\varphi(t)$ 满足条件：

1. $\varphi(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上单调，且具有**连续导数** $\varphi'(t)$；
2. 当 t 在 $[\alpha,\beta]$ 上变化时，$x=\varphi(t)$ 的值在 $[a,b]$ 上变化，且 $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$，

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

【注意】如果要对定积分换元，则要换积分上下限.

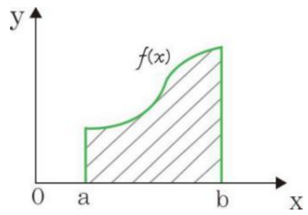
考点42：定积分的分部积分法

设函数 $u=u(x),v=v(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数，则 $\int_a^b uv'dx=\int_a^b udv=uv|_a^b-\int_a^b vdu$

考点43：平面图形的面积

直角坐标下平面图形的面积

1.由连续曲线 $y=f(x)\,(f(x)>0)$ 以及直线 $x=a,x=b$ 和 x 轴所围成的平面图形的面积为 $A=\int_a^b f(x)dx$



2.由连续曲线 $x=g(y)\,(g(y)>0)$ 以及直线 $y=a,y=b$ 和 y 轴所围成的平面图形的面积为 $A=\int_a^b g(y)dy$

3.由上、下两条连续曲线 $y=f_2(x),y=f_1(x)(f_2(x)\geq f_1(x))$ 及两条直线 $x=a,x=b(a<b)$ 所围成的平面图形，面积计算公式为 $A=\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]dx$

4.由左、右两条连续曲线 $x=g_1(y),x=g_2(y)(g_2(y)\geq g_1(y))$ 及两条直线 $y=c,y=d(c<d)$ 所围成的平面图形，面积计算公式为：$A=\int_c^d[g_2(y)-g_1(y)]dy$

考点44：旋转体的体积

平面图形绕 x 轴和 y 轴旋转

1.由连续曲线 $y=f(x)$ 以及直线 $x=a,x=b$ 和 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转所得旋转体体积：

$$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

2.由连续曲线 $x=g(y)$ 以及直线 $y=a,y=b$ 和 y 轴所围成的平面图形绕 y 轴旋转所得旋转体体积：

$$V_y=\pi\int_a^b g^2(y)dy$$

第四章　多元函数微积分学

考点 45：二元函数的定义

设在一变化过程中，有三个变量 x, y 和 z，如果对于变量 x, y 在某一范围 D 内任意取定的一对数值，变量 z 按一定的规律都有唯一确定的值与之对应，则称变量 z 是变量 x, y 的**二元函数**，记为

$$z = f(x, y) \text{ 或 } z = z(x, y)$$

其中 x, y 称为**自变量**，z 称为**因变量**，自变量 x, y 在变化过程中的取值范围 D 叫做**函数的定义域**.

对于确定的 (x_0, y_0)，函数 z 有唯一确定的值 z_0 与之对应，则称 z_0 为函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的函数值，记作 $f(x_0, y_0)$ 或 $z|_{(x_0, y_0)}$

考点 46：多元函数的定义

若对于变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 在其可能取值的某一范围内的每一组值，变量 z 依照某一法则有唯一确定值 z 与之对应，则称 z 为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 n 元函数，常记作 $z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

当 $n = 1$ 时，n 元函数就是一元函数；当 $n \geq 2$ 时，n 元函数统称为多元函数.

考点 47：二元函数的极限与连续

1.设二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0 = (x_0, y_0)$ 的某一去心邻域内有定义，如果当点 $P = (x, y)$ 以任意方式无限接近点 $P_0 = (x_0, y_0)$ 时，$f(x, y)$ 总无限接近于一个确定的常数 A，那么就称 A 是二元函数 $f(x, y)$ 当 $P = (x, y) \to P_0 = (x_0, y_0)$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A$ 或 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x, y) = A$.

2.设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0 = (x_0, y_0)$ 的某邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$，

则称二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0 = (x_0, y_0)$ 处连续.如果 $f(x, y)$ 在区域 D 内的每一点都连续，则称 $f(x, y)$ 在区域 D 上连续或称 $f(x, y)$ 是 D 上的连续函数.

考点 48：一阶偏导数

二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 对 x 的偏导数，就是一元函数 $z = f(x, y_0)$ 在点 x_0 的导数；二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 对 y 的偏导数，就是一元函数 $z = f(x_0, y)$ 在点 y_0 的导数，可见二元函数求偏导数相当于一元函数求导数，只需在求 x 的偏导数时，将 y 看作**常量**；在求 y 的偏导数时，将 x 看作**常量**（即对谁求导，谁在变，其余视为常数）.

考点 49：高阶偏导数

设函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 内有偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x} = f_x$，$\frac{\partial z}{\partial y} = f_y$，一般来说，它们在 D 内还是 x, y 的函数，如果这两个函数的偏导数存在，继续对 x 和 y 求偏导，则偏导数的偏导称为 $z = f(x, y)$ 的**二阶偏导数**.

按对变量求导次序的不同，二元函数 $z = f(x, y)$ 有下列四个二阶偏导数：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})=f_{xx}(x,y),\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=f_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y})=f_{yx}(x,y),\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y})=f_{yy}(x,y)$$

其中 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 称为**混合偏导数**.同样，可以定义三阶，四阶，$\dots$，n 阶偏导数，二阶及二阶以上的偏导数统称为**高阶偏导数**.

若函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 都在点 (x,y) 处连续，则有 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

考点 50：全微分

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的某邻域内有定义，若函数在点 (x,y) 的**全增量**

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

可表示为 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$

其中 A,B 不依赖于 $\Delta x,\Delta y$ 而仅与 x,y 有关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，$o(\rho)$ 是当 $\rho\to 0$ 时比 ρ 高阶的无穷小，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微分，而 $A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的**全微分**，记作 dz，即 $dz=A\Delta x+B\Delta y$.

1.全微分存在的必要条件：设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微分，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 必定存在，且函数 $z=f(x,y)$ 在该点的全微分为 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$.

2.全微分存在的充分条件：设函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 $P(x,y)$ 处连续，则 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处可微分.

考点 51：多元函数的连续、可微、偏导数存在与连续之间的关系

$$\text{偏导数连续}\Rightarrow\text{可微}\begin{cases}\Rightarrow\text{偏导数存在，}\\ \Rightarrow\text{连续.}\end{cases}$$

1.反之均不一定成立.

2.对于多元函数，偏导数存在不一定连续，连续也不一定偏导数存在.

考点 52：复合函数的偏导数

在计算复合函数的偏导数之前，通常先分析清楚变量之间的关系，再根据链式法则求导.

链式法则：设函数 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 在点 (x,y) 处有连续偏导数，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v)

处有连续偏导数.则复合函数 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ 在点 (x,y) 处对 x 与 y 有连续偏导数，且有下列链式法则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

考点 53：一元隐函数求导公式

设函数 $F(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数 $F_x(x_0,y_0),F_y(x_0,y_0)$，且 $F(x_0,y_0)=0$，$F_y(x_0,y_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y)=0$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数 $y=f(x)$，它满足条件 $y_0=f(x_0)$，并有 $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$.

考点 54：二元隐函数求偏导数公式

设函数 $F(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数 $F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)$，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，$F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$，它满足条件 $z_0=f(x_0,y_0)$，并有 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$.

考点 55：二元函数无条件极值

（1）极值的定义

设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 上有定义，点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域 $U\subset D$.如果对于 U 中异于 $P_0(x_0,y_0)$ 的任何点 $P(x,y)$，总有不等式 $f(x,y)<f(x_0,y_0)$ 成立，则称 $f(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 的**极大值**，其中 $P_0(x_0,y_0)$ 称为极大值点.如果对于 U 中异于 $P_0(x_0,y_0)$ 的任何点 $P(x,y)$，总有不等式 $f(x,y)>f(x_0,y_0)$ 成立，则称 $f(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 的极小值，其中 $P_0(x_0,y_0)$ 称为**极小值点**.

（2）取得极值的必要条件

如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的两个偏导数都存在，且此函数在该点处取得极值，则 $f_x(x_0,y_0)=0,f_y(x_0,y_0)=0$.使得函数 $z=f(x,y)$ 的两个偏导数都等于零的点称为驻点，与一元函数类似，可导的极值点必是**驻点**，但极值点不一定是驻点.

（3）取得极值的充分条件

设函数 $f(x,y)$ 在驻点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域内具有二阶连续偏导数.令

$A=f_{xx}(x_0,y_0),B=f_{xy}(x_0,y_0),C=f_{yy}(x_0,y_0)$，$\Delta=B^2-AC$，则

1.当 $\Delta<0$ 时，点 $P_0(x_0,y_0)$ 是函数的极值点，且当 $A<0$ 时 $f(x_0,y_0)$ 是**极大值**; 当 $A>0$ 时 $f(x_0,y_0)$ 是**极小值**;

2.当 $\Delta>0$ 时，点 $P_0(x_0,y_0)$ 不是函数的极值点；

3.当 $\Delta=0$ 时，无法判断函数在 $f(x,y)$ 点 $P_0(x_0,y_0)$ 是否有极值.

考点 56：二元函数的条件极值

求二元函数 $z=f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值称为条件极值，可以按照如下步骤进行:

1.构造拉格朗日函数 $L(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$；

2.解方程组 $\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0\\ \varphi(x,y)=0\end{cases}$；

3.若求得方程组的解为 x_0,y_0,λ_0，则 (x_0,y_0) 是**可疑极值点**.

同理，求三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在约束条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 下的极值，可以按照如下步骤进行:

1.构造拉格朗日函数 $L(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)$；

2.解方程组 $\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=f_x(x,y,z)+\lambda\varphi_x(x,y,z)=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=f_y(x,y,z)+\lambda\varphi_y(x,y,z)=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=f_z(x,y,z)+\lambda\varphi_z(x,y,z)=0\\ \varphi(x,y,z)=0\end{cases}$；

3.若求得方程组的解为 x_0,y_0,z_0,λ_0，则 (x_0,y_0,z_0) 是**可疑极值点**.

上述方法称为**拉格朗日乘数法**.

第五章　概率论初步

考点 57：分类计数原理（加法原理）

如果完成一件事有 n 类方法，第一类有 m_1 种方法，第二类有 m_2 种方法，…，第 n 类有 m_n 种方法，那么完成这件事共有 $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$（种）方法.

例如，从甲地到乙地，可以乘火车也可以乘飞机，每天火车有 3 班，飞机有 2 班，则一天中从甲到乙地共有几种走法？实际上，从甲地到乙地有两类办法，一类是火车，有 3 种走法；一类是飞机，有 2 种走法.故共有 $3+2=5$（种）方法.

考点 58：分步计数原理（乘法原理）

如果完成一件事需要 n 个步骤，第一步有 m_1 种方法，第二步有 m_2 种方法，…，第 n 步有 m_n 种方法，那么完成这件事共有 $N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$（种）方法.

例如，从甲地到丙地必须经过乙地，甲地到乙地有 3 条路可走，乙地到丙地有 2 条路可走，则从甲地到丙

地共有多少种不同走法？从甲地到丙地需要分成两个步骤完成：第一步先从甲地到乙地，有3种走法，第二步再从乙地到丙地，有2种走法.故完成从甲地到丙地这个任务共有$3\times2=6$（种）走法.

两个基本原理的区别：

1.加法原理：完成一件事情与分类有关，即每一类各自独立完成，此事即可完成.

2.乘法原理：完成一件事情与步骤有关，即依次完成每一步骤，此事才能完成.

考点59：排列

（1）定义：从n个不同的元素里，任取$m(1\le m\le n)$个元素，按照一定的顺序排成一列，称为从n个不同元素里取出m个元素的一个排列.

从n个不同的元素里，任取$m(1\le m\le n)$个元素的所有排列的个数，叫作从n个不同元素里取出m个元素的排列数，记为A_n^m，当$m=n$时的排列称为全排列，其排列总数记为A_n^n.

（2）排列数计算公式

1. $A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$.

2. $A_n^n=n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1=n!$.

考点60：组合

（1）定义：从n个不同的元素里，任取$m(1\le m\le n)$个元素组成一组，叫作从n个不同元素里取出m个元素的一个组合.

从n个不同的元素里，任取$m(1\le m\le n)$个元素的所有组合的个数，叫作从n个不同元素里取出m个元素的组合数，记为C_n^m.

（2）组合数计算公式

1. $C_n^m=\dfrac{A_n^m}{A_m^m}=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

2. $C_n^m=C_n^{n-m}$.

考点61：随机事件的概念

（1）样本空间：样本点的全体构成的集合，样本空间的元素是试验E的每个结果.

（2）随机事件：在一次试验中可能出现也可能不出现的事件，记作$A,B,C\cdots$或$A_1,A_2\cdots$.

（3）事件：试验E所对应的样本空间Ω的子集为E的一个随机事件.

（4）基本事件：样本空间Ω仅包含一个样本点ω的单点子集$\{\omega\}$也是一种随机事件，这种事件称为基本事件.

（5）必然事件：样本空间Ω包含所有的样本点，它是Ω自身的子集，在每次试验中它总是发生.

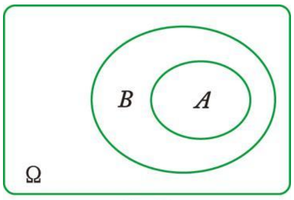
考点62：随机事件的关系与运算

（1）事件的包含与相等

设A,B为两个事件，若A发生**必然导致**B发生，则称事件B包含事件A，或称事件A包含在事件B中，

记作 $B\supset A$ 或 $A\subset B$.显然有：$\varnothing\subset A\subset\Omega$.

包含关系可用图形来表示，如图：



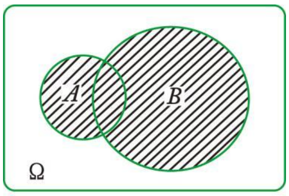
$A\subset B$

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

（2）和事件

事件“A,B 中<u>**至少有一个发生**</u>”为事件 A 与 B 的<u>**和事件**</u>，也称 A 与 B 的<u>**并**</u>，记作 $A\bigcup B$ 或 $A+B$.显然有：1）$A\subset A\bigcup B$，$B\subset A\bigcup B$；2）若 $A\subset B$，则 $A\bigcup B=B$.

和事件可用图形来表示，如图：

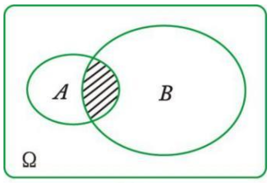


$A\cup B$

（3）积事件

事件“A,B <u>**同时发生**</u>”为事件 A 与事件 B 的<u>**积事件**</u>，也称 A 与 B 的<u>**交**</u>，记作 $A\bigcap B$，简记为 AB.显然有：1）$AB\subset A$，$AB\subset B$；2）若 $A\subset B$，则 $AB=A$.

积事件可用图形来表示，如图：



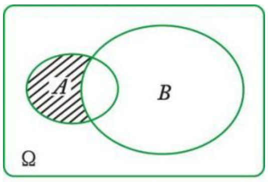
$A\cap B$

（4）差事件

事件“A 发生而 B 不发生”为事件 A 与事件 B 的<u>**差事件**</u>，记作 $A-B$.显然有：

1）$A-B\subset A$；2）若 $A\subset B$，则 $A-B=\varnothing$.

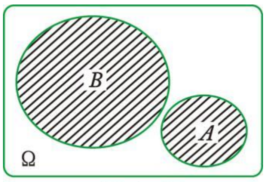
差事件可用图形来表示，如图：



$A-B$

（5）互不相容

若事件 A 与事件 B <u>**不能同时**</u>发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是<u>**互不相容**</u>的两个事件，简称 A 与 B <u>**互不相容（或互斥）**</u>，如图所示：



$A\cap B=\varnothing$

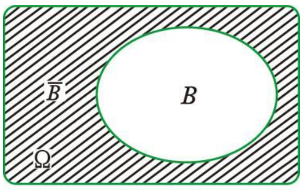
（6）对立事件

事件“B 不发生”为事件 B 的<u>**对立事件**</u>（或余事件，或逆事件），

若事件 A 与事件 B 中至少有一个发生，且 A 与 B 互不相容，即 $A\bigcup B=\Omega$，$AB=\varnothing$，则称 A 与 B 互为对立事件.

显然有：1）$\overline{\overline{A}}=A$；　　2）$\overline{\Omega}=\varnothing$，$\overline{\varnothing}=\Omega$；

3）$A-B=A\overline{B}=A-AB$.



$B\cup\overline{B}=\Omega, B\cap\overline{B}=\varnothing$

（7）运算律

1）**交换律**：$A\bigcup B=B\bigcup A$，$A\bigcap B=B\bigcap A$.

2）**结合律**：$A\bigcup(B\bigcup C)=(A\bigcup B)\bigcup C$，$A\bigcap(B\bigcap C)=(A\bigcap B)\bigcap C$；

3）**分配律**：$A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$，$A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$；

4）**对偶律**：$\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B}$，$\overline{A\bigcap B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$.

考点 63：古典概型概述

具有下面两个特点的随机试验的概率模型，称为**古典概型**：

1.基本事件的**总数是有限的**，换句话说样本空间仅含有有限个样本点；

2.每个基本事件发生的**可能性相同**.

设 Ω 为随机试验 E 的样本空间，其中所含样本点总数为 n，A 为一随机事件，其中所含样本点数为 r，则有：$P(A)=\frac{r}{n}=\frac{A\text{中样本点数}}{\Omega\text{中样本点总数}}$，也即 $P(A)=\frac{r}{n}=\frac{A\text{所含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$

考点 64：概率

（1）定义

设 Ω 是随机试验 E 的样本空间，对于 E 的**每个事件** A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，称 $P(A)$ 为事件 A 的概率，如果它满足下列条件：

1. $P(A)\geq 0$；

2. $P(\Omega)=1$；

3.设 $A_1,A_2,\cdots,A_m,\cdots$ 是一列**互不相容**的事件，则有 $P(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}P(A_k)$.

（2）性质

1. $0\leq P(A)\leq 1$，$P(\varnothing)=0$；

2.对于任意事件 A,B 有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，

特别地，当 A 与 B 互不相容时，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$；

3. $P(B-A)=P(B)-P(AB)$，

特别地，当 $A\subset B$ 时，$P(B-A)=P(B)-P(A)$，且 $P(A)\leq P(B)$；

4. $P(\overline{A})=1-P(A)$；

5. $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$；

6.当 A 与 B **互不相容**时，$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})$.

考点 65：条件概率的计算

已知事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的概率，称为在事件 B 发生的条件下事件 A 的**条件概率**，记作 $P(A|B)$.

设 A,B 是两个事件，且 $P(B)>0$，称 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$，为在事件 B 发生条件下事件 A 发生的条件概率.

考点 66：事件的独立性

（1）定义：$P(AB)=P(A)P(B)$，则称 A 与 B **相互独立**，简称 A,B 独立.

（2）性质

1.设 $P(A)>0$，则 A 与 B 相互独立的充分必要条件是 $P(B)=P(B|A)$；

2.若 A 与 B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 都相互独立；

3. $P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=P(\overline{A})P(\overline{B})$.

考点 67：离散型随机变量

（1）随机变量： 设 E 是随机试验，样本空间为 Ω，如果对于每一个结果（样本点）$\omega\in\Omega$，有一个实数 $X(\omega)$ 与之对应，这样就得到一个定义在 Ω 上的实值函数 $X(\omega)$，称为随机变量.随机变量通常用 $X,Y,Z\cdots$ 或 $X_1,X_2,\cdots$ 来表示.

（2）离散型随机变量的分布律

设 X 为离散型随机变量，可能取值为 $x_1,x_2,\ldots,x_k,\ldots$，且 $P\{X=x_k\}=p_k$，$k=1,2,\cdots$，则称 $\{p_k\}$ 为 X 的<u>**分布律**</u>（或分布列，或概率分布）.

用表格的形式来表示：

X	x_1	x_2	…	x_k	…
P	p_1	p_2	…	p_k	…

其中第一行表示 X 的取值，第二行表示 X 取相应值的概率.

1. $p_k\geq 0$，$k=1,2,\cdots$；　　2. $\sum\limits^{n} p_k=1$.

（3）离散型随机变量的几个常见分布

1. $0-1$ 分布： 若随机变量 X 只取两个可能值 0，1，且 $P\{X=1\}=p$，$P\{X=0\}=q$，其中 $0<p<1$，$q=1-p$，则称 X 服从 $0-1$ 分布，X 的分布律为

X	0	1
P	q	p

2.二项分布： 若随机变量 X 的可能取值 $0,1,\cdots,n$，而 X 的分布律为

$$p_k=P\{x=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}, k=0,1,2,3\ldots,\ n,$$

其中 $0<p<1$，$p+q=1$，则称 X 服从参数为 n，p 的<u>**二项分布**</u>，简记为 $X\sim B(n,p)$.

3.泊松分布： 设随机变量 X 的可能取值为 0，1，2，…，n，…，而 X 的分布律为

$$p_k=P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0,1,2\cdots$$

其中 $\lambda>0$，则称 X 服从参数为 λ 的<u>**泊松分布**</u>，简记为 $X\sim P(\lambda)$.

（4）分布函数： 设 X 为随机变量，称函数 $F(x)=P\{X\leq x\}$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 为 X 的分布函数.

分布函数的重要性质有：

1. $0\leq F(x)\leq 1$；

2. $F(x)$是**不减函数**，即对于任意的$x_1 < x_2$有$F(x_1) \le F(x_2)$；

3. $F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$，即$\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0, \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$；

4. $F(x)$**右连续**，即$F(x+0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+} F(x+\Delta x)=F(x)$.

分布函数与概率的关系：

已知X的分布函数$F(x)$，可以求出下列重要事件的概率：

1. $P\{X \le b\}=F(b)$；

2. $P\{a < X \le b\}=F(b)-F(a)$，其中$a<b$；

3. $P\{X > b\}=1-F(b)$.

考点68：期望与方差

（1）离散型随机变量的期望： 设离散型随机变量X的分布律为$P\{X=x_k\}=p_k$，$k=1,2,\cdots,$则定义X的数学期望（简称均值或期望），记为$E(X)$，即$E(X)=\sum\limits^{\infty} x_i p_i$.

下面介绍几种重要的离散型随机变量的期望

1. $0-1$**分布：** 设随机变量X的分布律，则$E(X)=0\cdot(1-p)+1\cdot p=p$.

X	0	1
P	1-P	P

2.**二项分布**：设$X\sim B(n,p)$，则有$E(X)=np$.

3.**泊松分布：** 设$X\sim P(\lambda)$，则有$E(X)=\lambda$.

（2）期望的性质

1. $E(c)=c$，其中c为常数；

2. $E(cX)=cE(X)$；

3. $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.

这一性质可作如下推广：$E(c_1X+c_2Y)=c_1E(X)+c_2E(Y)$，其中$c_1$，$c_2$为常数；

一般地，设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为n个随机变量，则有

$E\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n} E(X_i)$，$E\left(\sum\limits_{i=1}^{n} c_iX_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n} c_iE(X_i)$，其中$c_i(i=1,2,\cdots)$是常数.

4.若X，Y是**相互独立**的随机变量，则$E(XY)=E(X)E(Y)$.

（3）方差： 设X为随机变量，若$E[X-E(X)]^2$存在，则称它为随机变量X的方差，记作$D(X)$，即$D(X)=E[X-E(X)]^2$，称$\sqrt{D(X)}$为X的标准差（或均方差）.在计算方差时，用此公式有时更为简便：$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$，即X的方差等于X^2的期望减去X的期望的平方.

下面介绍几种重要的离散型随机变量的方差

1.0-1 分布：设随机变量 X 的分布律

X	0	1
P	1-P	P

2.**二项分布**：设 $X \sim B(n,p)$，则有 $D(X)=np(1-p)$.

3.**泊松分布：**设 $X \sim P(\lambda)$，则有 $D(X)=\lambda$.

（4）方差的性质

1. $D(c)=0$， $D(X+c)=D(X)$，其中 c 为常数；

2. $D(cX)=c^2D(X)$，其中 c 为常数；特别地， $D(-X)=(-1)^2D(X)=D(X)$.

3.若 X,Y **相互独立**，则 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$， $D(X-Y)=D(X)+D(Y)$.