

2025 年

成考专升本 高等数学（一）

黄金考点汇编

第一章 极限与连续

考点 1. 幂函数基本公式

$$(1) x^m \cdot x^n = x^{m+n} \quad (2) \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \quad (3) \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} \quad (4) x^{-m} = \frac{1}{x^m}$$

考点 2. 三角函数公式

(1) 三角函数恒等式

$$\textcircled{1} \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \textcircled{2} \tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

$$\textcircled{3} \cot^2 x = \csc^2 x - 1 \quad \textcircled{4} \tan x \cdot \cot x = 1$$

$$\textcircled{5} \sec x \cdot \cos x = 1 \quad \textcircled{6} \csc x \cdot \sin x = 1$$

$$\textcircled{7} \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \textcircled{8} \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

(2) 倍角公式与半角公式

$$\textcircled{1} \sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x \quad \textcircled{2} \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\textcircled{3} \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \quad \textcircled{4} \cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x}$$

$$\textcircled{5} \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2} \quad \textcircled{6} \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \quad \textcircled{7} \tan^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

考点 3. 反三角函数基本关系式

$$\textcircled{1} \arcsin(-x) = -\arcsin x (-1 \leq x \leq 1) \quad \textcircled{2} \arccos(-x) = \pi - \arccos x (-1 \leq x \leq 1)$$

$$\textcircled{3} \arctan(-x) = -\arctan x \quad \textcircled{4} \operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x$$

$$\textcircled{5} \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} (-1 \leq x \leq 1) \quad \textcircled{6} \arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} \quad \textcircled{7} \arctan x = \operatorname{arccot} \frac{1}{x} (x > 0)$$

考点 4. 常见角度三角函数表

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
函数	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot \alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞

考点 5. 函数的定义:

设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定数集, 如果当 x 在 D 中任意取定一个值时, 通过一定的对应法则 f , 变量 y 总有确定的数值与 x 对应, 则称 y 是 x 的函数。记作 $y = f(x)$ 。数集 D 称为函数 $y = f(x)$ 的定义域。

考点 6. 常见函数的定义域

$$(1) y = \frac{1}{x}, D: x \neq 0$$

$$(2) y = \sqrt[n]{x}, D: x \geq 0$$

$$(3) y = \log_a x, D: x > 0$$

$$(4) y = \tan x, D: x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$(5) y = \cot x, D: x \neq k\pi$$

$$(6) \begin{cases} y = \arcsin x \\ y = \arccos x \end{cases}, D: x \in [-1, 1]$$

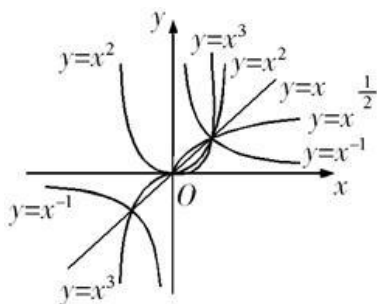
考点 7. 反函数

(1) 定义: 一般的, 给定 y 是 x 的函数 $y = f(x)$, 如果把 y 当做自变量, x 当做函数, 则由关系式 $y = f(x)$ 所确定的函数 $x = f^{-1}(y)$ 叫做 $f(x)$ 的反函数。习惯上记为 $y = f^{-1}(x)$ 。

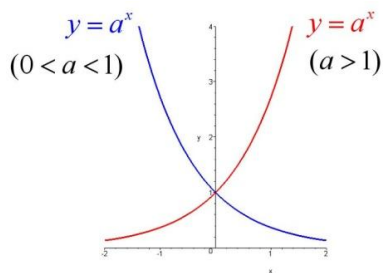
注: 反函数求解步骤: 直接函数 $\xrightarrow{\text{解出 } x}$ 以 y 为自变量的反函数 $\xrightarrow{\text{调换 } x \text{ 和 } y}$ 反函数

考点 8. 基本初等函数的分类

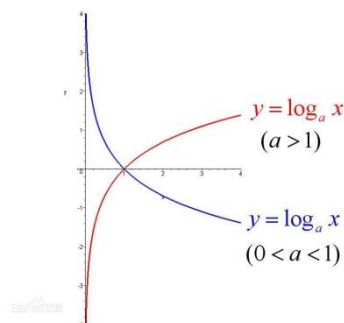
(1) 幂函数: $y = x^u$, (u 为常数) a



(2) 指数函数: $y = a^x$, (a 是常数且 $a > 0$ 、 $a \neq 1$)

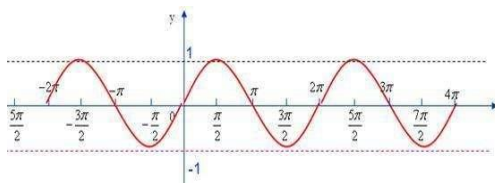


(3) 对数函数: $y = \log_a x$, (a 是常数且 $a > 0$ 、 $a \neq 1$)

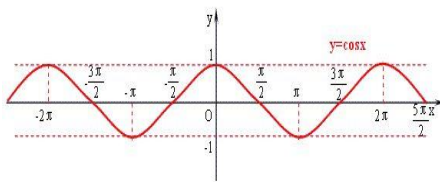


(4) 三角函数:

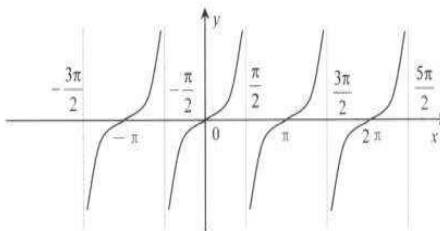
① 正弦函数 $y = \sin x$, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[-1, 1]$, 奇函数, 周期为 2π



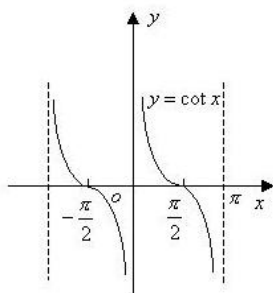
② 余弦函数 $y = \cos x$, 定义域 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[-1, 1]$, 偶函数, 周期为 2π



③ 正切函数 $y = \tan x$, 定义域为 $\{x|x \neq k\pi \pm \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$, 奇函数, 周期为 π



④ 余切函数 $y = \cot x$, 定义域为 $\{x|x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$, 奇函数, 周期为 π

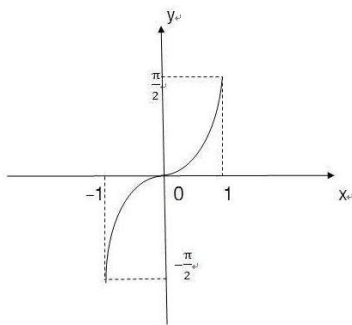


⑤ 正割函数 $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$, 定义域为 $\{x|x \neq k\pi \pm \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, 值域为 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, 偶函数, 周期为 2π

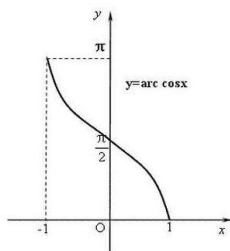
⑥ 余割函数 $y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$, 定义域为 $\{x|x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, 值域为 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, 奇函数, 周期为 2π

(5) 反三角函数:

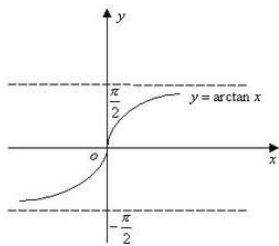
① 反正弦函数: $y = \arcsin x$, 定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 奇函数



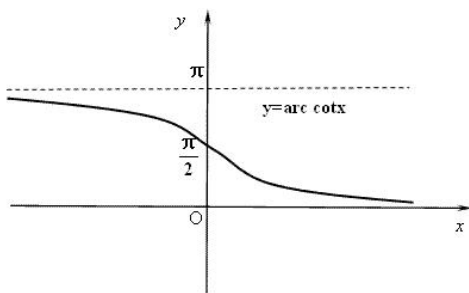
②反余弦函数: $y = \arccos x$, 定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $[0, \pi]$



③反正切函数: $y = \arctan x$, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 奇函数



④反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(0, \pi)$



考点 9. 数列的极限

- (1) 定义: 若对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$ 时, 有 $|a_n - A| < \varepsilon$, 称 A 为数列 $\{a_n\}$ 的极限, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ 。
- (2) 数列极限的有界性: 如果数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 为有界数列。
- (3) 收敛数列与其子数列间的关系: 如果数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A , 那么它的任何一个子数列也收敛, 其极限也为 A 。

注: 单调有界数列必收敛

考点 10. 函数的极限

1. 当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 的极限: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

左极限: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$

右极限: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$

定理: 函数在某一点极限存在的充要条件: 左右极限存在且相等。

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$$

2. 极限的运算法则

若 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 那么:

$$(1) \lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B;$$

$$(2) \lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B;$$

$$(3) \text{ 又 } B \neq 0, \text{ 则 } \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}.$$

$$(4) \lim kf(x) = k \lim f(x) = kA$$

3. 两个重要极限

(1) 第一个重要极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{\varphi(x) \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1.$$

(2) 第二个重要极限:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{\varphi(x) \rightarrow 0} (1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}} = e.$$

考点 11. 无穷小量与无穷大量

(1) 定义:

无穷小量: 当函数在 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时极限为零, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$), 那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷小。

无穷大量: 如果当 $x \rightarrow 0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时, 函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大, 则称 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow 0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的

无穷大量, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ (或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$)

(2) 无穷小的比较:

设 $\lim \alpha = 0, \lim \beta = 0$

①若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 是比 α 较高阶的无穷小量, 记为 $\beta = o(\alpha)$;

②若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c$ ($c \neq 0$ 为常数), 则称 β 与 α 是同阶的无穷小量;

③若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 则称 β 与 α 是等价的无穷小量, 记作: $\beta \sim \alpha$;

④若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 则称 β 是比 α 较低阶的无穷小量。

(3) 无穷小与极限的关系

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \text{ 其中 } \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$$

(4) 常用的等价无穷小量:

$$x \rightarrow 0$$

$$(1) x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$$

$$(2) 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \quad 1 - \cos^a x \sim \frac{a}{2} x^2$$

$$(3) (1+x)^a - 1 \sim ax \quad a^x - 1 \sim x \ln a$$

$$(4) x - \sin x \sim \frac{x^3}{6} \quad \tan x - x \sim \frac{x^3}{3} \quad \tan x - \sin x \sim \frac{x^3}{2}$$

考点 12. 求极限常用方法

1. 消零因子法 (适用于 $x \rightarrow x_0$ 时, “ $\frac{0}{0}$ ” 型);

2. 抓大头法 (适用于 $n \rightarrow \infty$ 或 $x \rightarrow \infty$ 时, “ $\frac{\infty}{\infty}$ ” 型);

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0} & m = n \\ 0 & m > n \\ \infty & m < n \end{cases}$$

3. 有理化法 (适用于带有根式的极限问题);

4. 通分法 (适用于 “ $\infty - \infty$ ” 型);

5. 运用两个重要极限;

6. 无穷小量的性质 (两个无穷小量的积为无穷小量, 无穷小量与有界变量的乘积为无穷小量);

7. 等价无穷小量代换法;

8. 利用极限存在的充要条件求分段函数在分段点的极限;

9. 洛必达法则。

考点 13. 夹逼准则

设在 x_0 的某个去心邻域内, 恒有 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$ 。则当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 极限存在, 且

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

考点 14. 连续

1. 连续的定义: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 点连续。

2. 连续的充要条件: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

3. 初等函数在定义域内连续。

4. 左右连续

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 点右连续

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 点左连续

考点 15. 间断

1. 间断点的分类

(1) 第一类间断点 (左右极限都存在)

$$\begin{cases} \text{可去间断点: } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \\ \text{跳跃间断点: } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \end{cases}$$

(2) 第二类间断点 (左右极限至少有一个不存在)

$$\begin{cases} \text{无穷间断点: 至少有一个极限为无穷} \\ \text{振荡间断点: 至少有一个极限不存在} \end{cases}$$

第二章 一元函数微分学

考点 16. 导数的定义:

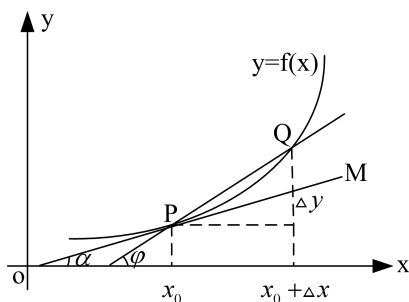
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ 或 } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\textcircled{1} \text{左导数 } f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\textcircled{2} \text{右导数 } f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

考点 17. 导数的几何意义:

曲线在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率。



特别地, 若 $f'(x_0) = 0$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处切线平行于 x 轴;

若 $f'(x_0) = \infty$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处切线垂直于 x 轴, 切线方程为 $x = x_0$;

函数 $y = f(x)$ 在 $M(x_0, y_0)$ 的

切线方程为: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

法线方程为: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) (f'(x_0) \neq 0)$

考点 18. 求导公式

$$(1) (C)' = 0$$

$$(2) (x^\mu)' = \mu x^{\mu-1},$$

$$(3) (\sin x)' = \cos x$$

$$(4) (\cos x)' = -\sin x$$

$$(5) (\tan x)' = \sec^2 x$$

$$(6) (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(7) (\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$(8) (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(9) (a^x)' = a^x \ln a$$

$$(10) (e^x)' = e^x$$

$$(11) (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(12) (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(13) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(14) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(15) (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(16) (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

考点 19. 函数的和、差、积、商的求导法则

设 $u = u(x)$, $v = v(x)$ 都可导, 则:

$$(1) (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(2) (Cu)' = Cu' (C \text{ 为常数})$$

$$(3) (uv)' = u'v + uv'$$

$$(4) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} (v \neq 0)$$

考点 20. 复合函数求导法则

设 $y = f(u)$, 而 $u = g(x)$ 且 $f(u)$ 及 $g(x)$ 都可导, 则复合函数 $y = f[g(x)]$ 的导数为: $y'(x) = f'(u) \cdot g'(x)$

考点 21. 对数求导

对数求导适用于幂指函数 $y = u(x)^{v(x)}$ 和某些用连乘连除或乘方开方表示的函数。应先对等式两边取对数, 然后用隐函数求导方法求其导数。

考点 22. 参数方程求导

$$\text{设 } \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \text{ 则 } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

考点 23. 高阶求导

$y' = f'(x)$ 为 $y = f(x)$ 的一阶导数。把 $y' = f'(x)$ 的导数叫做函数 $y = f(x)$ 的二阶导数, 记作 y'' 或 $\frac{d^2y}{dx^2}$, 类似的,

二阶导数的导数叫做三阶导数。一般地, 把 $y = f(x)$ 的 $(n-1)$ 阶导数 $y^{(n-1)}$ 的导数叫做 $y = f(x)$ 的 n 阶导数, 记为 $y^{(n)}$

或 $\frac{d^n y}{dx^n}$ 。二阶及二阶以上导数统称为高阶导数。

考点 24. 微分

函数 $f(x)$ 可微分的充要条件是: 函数 $f(x)$ 可导, 且 $dy = f'(x)dx$

考点 25. 可导、可微与连续三者之间的关系

$f(x)$ 点 x_0 可导 $\Leftrightarrow f(x)$ 在点 x_0 可微 $\Rightarrow f(x)$ 点 x_0 连续

即: 可导必连续, 连续不一定可导

考点 26. 洛必达法则的应用

设 $x \rightarrow 0 (x \rightarrow \infty)$ 时, 满足一下三个条件:

① 函数 $f(x)$, $g(x)$ 均为无穷小量 (或均为无穷大量);

②在点 x_0 的某个去心邻域内 (或 $|x| > M$) , $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 都存在且 $g'(x) \neq 0$

③ $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在

$$\text{则: } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{0/0 \text{ (或 } \frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \stackrel{0/0 \text{ (或 } \frac{\infty}{\infty})}{=} \dots\dots$$

注: 其中洛必达法则适用于 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$ 求极限。

考点 27. 函数的单调性

设函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导。

(1) 如果在 (a, b) 内 $f'(x) > 0$, 那么函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 内单调增加;

(2) 如果在 (a, b) 内 $f'(x) < 0$, 那么函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 内单调减少

考点 28. 函数的极值:

(1) 极值的定义:

设 $f(x)$ 在 (a, b) 内有定义, x_0 是 (a, b) 内的一点; 若对于 x_0 的某个邻域内的任意点 $x \neq x_0$, 都有:
 $f(x_0) > f(x)$ [或 $f(x_0) < f(x)$] 则称 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的一个极大值 (或极小值), 称 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点 (或极小值点)。

(2) 驻点的定义: 若 $f'(x_0) = 0$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的驻点。

(3) 极值存在的必要条件: 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且在 x_0 取得极值, 那么 $f'(x_0) = 0$

(4) 极值存在的充分条件:

定理 1 (第一充分条件): 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 且在 x_0 的某去心邻域内可导。

①当 x 渐增通过 x_0 时, $f'(x)$ 由 (+) 变 (-); 则 $f(x_0)$ 为极大值;

②当 x 渐增通过 x_0 时, $f'(x)$ 由 (-) 变 (+); 则 $f(x_0)$ 为极小值。

定理 2 (第二充分条件): 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶导数, 且 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$ 。

①若 $f''(x_0) < 0$, 则 $f(x_0)$ 为极大值;

②若 $f''(x_0) > 0$, 则 $f(x_0)$ 为极小值。

考点 29. 凹凸区间和拐点的应用

(1) 曲线的凹凸性及拐点:

①若 $f''(x) > 0, x \in (a, b)$; 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内是凹的 (下凸), (U);

②若 $f''(x) < 0, x \in (a, b)$; 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内是凸的 (上凸), (∩);

(2) 凹凸性改变的点称为拐点。

考点 30. 渐近线方程

(1) 水平渐近线: 若 $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} f(x) = b$, 则曲线 $y = f(x)$ 有水平渐近线 $y = b$;

(2) 垂直渐近线: $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0^+ \\ (x \rightarrow x_0^-)}} f(x) = \infty$, 则曲线 $y = f(x)$ 有垂直渐近线 $x = x_0$;

(3) 斜渐近线: 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k \neq 0, b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]$, 则 $y = kx + b$ 为 $y = f(x)$ 的斜渐近线。

第三章 一元函数积分学**考点 31. 不定积分的概念和性质**

(1) 若 $F'(x) = f(x)$, 则 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int f(x)dx = F(x) + C$

(2) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

(3) $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$

(4) $\frac{d}{dx} [\int f(x)dx] = f(x)$ 或 $d[\int f(x)dx] = f(x)dx$

(5) $\int F'(x)dx = F(x) + C$ 或 $\int dF(x) = F(x) + C$

考点 32. 基本积分公式

(1) $\int kdx = kx + C$

(2) $\int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C (\mu \neq -1)$

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$

(4) $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$

(5) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

(6) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

$$(7) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$(8) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$(9) \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$(10) \int e^x dx = e^x + C$$

$$(11) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

考点 33. 不定积分的方法

(1) 第一换元积分法 (凑微分法)

$$\int g(x) dx \xrightarrow{\text{拆}} \int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx \xrightarrow{\text{凑}} \int f[\varphi(x)] d\varphi(x) \xrightarrow{\varphi(x)=u} \int f(u) du$$

$$= F(u) + C \xrightarrow{u=\varphi(x)} F[\varphi(x)] + C$$

(2) 第二换元积分法

$$\int f(x) dx \xrightarrow[\varphi'(t) \neq 0]{\text{令 } x = \varphi(t)} \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = F(t) + C \xrightarrow{t = \varphi^{-1}(x)} F[\varphi^{-1}(x)] + C$$

(3) 分部积分

$$\int u dv = uv - \int v du \text{ ----- 分部积分公式}$$

考点 34. 定积分的定义

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

定理 1 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积。

定理 2 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有界, 且只有有限个间断点, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积。

2. 定积分的性质

设 $f(x)$, $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积, 则

$$(1) \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$(2) \int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

$$(3) \int_a^b 1 dx = b - a$$

$$(4) \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

$$(5) \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$(6) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

考点 35. 牛顿——莱布尼茨公式:

若 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数, 则 $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$

考点 36. 变上限函数求导

如果函数 $f(x)$ 连续, 则 $\int_a^x f(t) dt (a \leq x \leq b)$ 是上限 x 的可导函数, 且有 $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$

若 $\varphi(x)$, $\phi(x)$ 均可导, 则变上限函数的求导公式:

$$(1) \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

$$(2) \frac{d}{dx} \int_x^a f(t) dt = -f(x)$$

$$(3) \frac{d}{dx} \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt = f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)$$

$$(4) \frac{d}{dx} \int_{\phi(x)}^{\varphi(x)} f(t) dt = f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) - f[\phi(x)] \cdot \phi'(x)$$

考点 37. 积分计算总结公式

(1) 定积分对称区间内, 偶倍奇零

设 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续, 则

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 0 & f(x) \text{ 为奇函数} \\ 2 \int_0^a f(x) dx & f(x) \text{ 为偶函数} \end{cases}$$

$$(2) \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{4} \pi a^2$$

考点 38. 定积分的换元法和分部积分法

(1) 定积分的换元法

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 令 $x = \varphi(t)$, 如果

① $\varphi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 当 $t \in [\alpha, \beta]$ 时, $\varphi(t)$ 的值不超出 $[a, b]$ 并且有连续的导函数,

② $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ 则有 $\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$

(2) 定积分的分部积分法

设函数 $u(x)$ 、 $v(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续导数, 则: $\int_a^b uv' dx = [uv] \Big|_a^b - \int_a^b u dv$

考点 39. 反常积分的概念和计算

(1) 无限区间的反常积分

如果极限 $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx (b > a)$ 存在, 则称此极限值为函数 $f(x)$ 在无限区间 $[a, +\infty)$ 上的广义积分。记作 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$,

$$\text{即: } \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

此时称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛。如果 $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$ 不存在, 则称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散。

若 $F'(x) = f(x)$, 则:

$$\textcircled{1} \int_a^{+\infty} f(x) dx = F(x) \Big|_a^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - F(a)$$

$$\textcircled{2} \int_{-\infty}^b f(x) dx = F(x) \Big|_{-\infty}^b = F(b) - \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$$

$$\textcircled{3} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = F(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$$

(2) 无界函数的反常积分

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a, b]$ 上连续。而 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$, 称 a 为 $f(x)$ 的瑕点。

如果极限 $\lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$ 存在, 则称此极限值为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b)$ 上的反常积分。记作 $\int_a^b f(x) dx$, 即

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

此时称反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛。如果上述极限不存在, 则称反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 发散。

类似的, 若 b 为瑕点, 则 $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$;

反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛的含义是 $\int_a^c f(x) dx$ 与 $\int_c^b f(x) dx$ 同时收敛。

若 $F'(x) = f(x)$, 则

$$(1) \text{ 若 } a \text{ 为瑕点, } \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_{a^+}^b = F(b) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x);$$

$$(2) \text{ 若 } b \text{ 为瑕点, } \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^{b^-} = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - F(a).$$

$$\begin{aligned} (3) \text{ 若 } c \text{ 为瑕点, } \int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \\ &= F(x) \Big|_a^c + F(x) \Big|_c^b = \lim_{x \rightarrow c^-} F(x) - F(a) + F(b) - \lim_{x \rightarrow c^+} F(x) \end{aligned}$$

考点 40.平面图形的面积

① 直角坐标下: 设区域 D 是由 $y=f(x), y=g(x)$ 以及直线 $x=a, x=b$ 所围成, 则平面图形 D 面积

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

考点 41.旋转体体积

① 直角坐标下: 设曲线是由 $y=f(x)$, 且 $f(x) > 0$ ($a \leq x \leq b$), 则

绕 x 轴旋转的体积: $V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx$

绕 y 轴旋转的体积: $V_y = 2\pi \int_a^b xf(x) dx$

第四章 多元函数微积分学**考点 42.向量的运算****(1) 向量积和数量积**

设 $a = (a_x, a_y, a_z)$, $b = (b_x, b_y, b_z)$

① 加减 $a \pm b = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$

② 数乘 $\lambda a = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$

③ 数量积 $a \cdot b = |a||b|\cos\theta$

$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

④ 向量积 $a \times b = c \begin{cases} |c| = |a||b|\sin\theta \\ c \perp a, c \perp b \end{cases}$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

考点 43.向量关系

(1) $a // b \Leftrightarrow a \times b = 0 \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$

(2) $a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$

考点 44.平面方程**(1) 平面的基本方程:**

①点法式: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

法向量 $n=(A, B, C)$

②一般式: $Ax+By+Cz+D=0$

③截距式: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1(abc \neq 0)$

(2) 平面与平面的位置关系

平面 Π_1 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

$n_1=(A_1, B_1, C_1)$

平面 Π_2 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

$n_2=(A_2, B_2, C_2)$

①垂直 $\Pi_1 \perp \Pi_2 \Leftrightarrow n_1 \cdot n_2 = 0 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

②平行 $\Pi_1 // \Pi_2 \Leftrightarrow n_1 \times n_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

考点 45. 直线方程

(1) 空间直线方程

①点向式方程: $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$

$s=\{m, n, p\}$ 为方向向量, (x_0, y_0, z_0) 为直线上的一点。

②一般式方程: $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

③参数式方程: $\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$

(2) 直线与直线的位置关系

直线 L_1 : $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$

$s_1=(m_1, n_1, p_1)$

$$\text{直线 } L_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

$$s_2 = (m_2, n_2, p_2)$$

$$\text{①垂直: } L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow s_1 \cdot s_2 = 0 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

$$\text{②平行: } L_1 // L_2 \Leftrightarrow s_1 \times s_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

(3) 直线与平面的位置关系

$$\text{直线 } L: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$$

$$s = (m, n, p)$$

$$\text{平面 } \Pi: Ax + By + Cz + D = 0$$

$$n = (A, B, C)$$

$$\text{①垂直: } L \perp \Pi \Leftrightarrow s \times n = 0 \Leftrightarrow \frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}$$

$$\text{②平行: } L // \Pi \Leftrightarrow s \cdot n = 0 \Leftrightarrow mA + nB + pC = 0$$

考点 46. 二元函数的概念

定义 设 D 是 R^2 上的一个非空子集, 称映射 $f: D \rightarrow R$ 为定义在 D 上的二元函数, 通常记为 $z = f(x, y), (x, y) \in D$ 。

其中点集 D 称为该函数的定义域。 x, y 称为自变量, z 称为因变量。

考点 47. 偏导数的定义

(1) 一阶偏导数

定义 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一领域内有定义, 当 y 固定在 y_0 , 而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时, 相应的函数有增量 $f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ 。

如果 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ 存在, 则称此极限为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数, 记为 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$;

或 $f_x(x_0, y_0)$ 。

类似的, 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 y 的偏导数定义为 $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$, 记作 $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$ 或

$$f_y(x_0, y_0)。$$

如果 $z = f(x, y)$ 在区域 D 内每一点 (x, y) 处对 x 的偏导数都存在, 那么这个偏导数就是 x 的偏导函数, 它就称为

$z = f(x, y)$ 对 x 的偏导函数, 记为 $\frac{\partial z}{\partial x}$, 或 $f_x(x, y)$ 。

类似的, 定义 $z = f(x, y)$ 对 y 的偏导函数, 记为 $\frac{\partial z}{\partial y}$, 或 $f_y(x, y)$ 。

偏导数连续 $\Rightarrow$ 函数可微 $\Rightarrow \begin{cases} \text{函数连续} \\ \text{偏导数存在} \end{cases}$

(2) 二阶偏导数

定义 设函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 内具有偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x, y), \frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x, y)$, 如果这两个函数的偏导数也存在, 则

称它们是函数 $z = f(x, y)$ 的二阶偏导数, 按照对变量的求导次序的不同, 有下列四个二阶偏导数:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right);$$

(3) 隐函数的导数

① 设由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的函数 $y = f(x)$ 在点 x 处有 $F_y \neq 0$, 则有 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$

② 设由方程 $F(x, y, z) = 0$ 确定函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处有 $F_z \neq 0$, 则有 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$

考点 48. 二元函数的全微分

函数 $z = f(x, y)$ 的全微分为 $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$

考点 49. 二元函数的极值 (无条件极值)

定义 设函数 $z = f(x, y)$ 的定义域为 D , $P_0(x_0, y_0)$ 为 D 的内点。

若存在 P_0 的某个邻域 $U(P_0) \subset D$, 使得对于该邻域内异于 P_0 的任何点 (x, y) , 都有 $f(x, y) < f(x_0, y_0)$, 则称函数

$f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 有极大值 $f(x_0, y_0)$, 点 (x_0, y_0) 称为函数 $f(x, y)$ 的极大值点;

若对于该邻域内异于 P_0 的任何点 (x, y) , 都有 $f(x, y) > f(x_0, y_0)$, 则称函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 有极小值 $f(x_0, y_0)$,

点 (x_0, y_0) 称为函数 $f(x, y)$ 的极小值点。极大值、极小值统称为极值。使得函数取得极值的点称为极值点。

定理 1 (必要条件) 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 具有偏导数, 且在点 (x_0, y_0) 处有极值, 则有 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$ 使 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$ 同时成立的点 (x_0, y_0) 叫 $z = f(x, y)$ 驻点。

定理 2 (充分条件) 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内连续且具有一阶及二阶偏导连续, 又 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$, 令 $f''_{xx}(x_0, y_0) = A$, $f''_{xy}(x_0, y_0) = B$, $f''_{yy}(x_0, y_0) = C$,

则 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处取得极值的条件如下:

- (1) $B^2 - AC < 0$ 时具有极值, 且当 $A < 0$ 时有极大值, 当 $A > 0$ 时有极小值;
- (2) $B^2 - AC > 0$ 时没有极值;
- (3) $AC - B^2 = 0$ 时可能有极值, 也可能没有极值, 还需另作讨论。

考点 50. 有条件极值

(1) 一个条件的极值

求 $z = f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极值

构造拉格朗日函数 $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$, 然后分别对 x, y, λ 求偏导数, 构造下列方程组

$$\begin{cases} F'_x = f'_x(x, y) + \lambda\varphi'_x(x, y) = 0 \\ F'_y = f'_y(x, y) + \lambda\varphi'_y(x, y) = 0 \\ F'_\lambda = \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

解出 (x, y) 的值, 代入 $f(x, y)$ 中即可。

(2) 两个条件的极值

求 $u = f(x, y, z)$ 在条件 $\varphi_1(x, y, z) = 0$ 和 $\varphi_2(x, y, z) = 0$ 下的极值

构造拉格朗日函数 $F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda\varphi_1(x, y, z) + \mu\varphi_2(x, y, z)$, 然后分别对 x, y, z, λ, μ 求偏导数, 构造下列方程组

$$\begin{cases} F'_x = f'_x(x, y, z) + \lambda\varphi'_{1x}(x, y, z) + \mu\varphi'_{2x}(x, y, z) = 0 \\ F'_y = f'_y(x, y, z) + \lambda\varphi'_{1y}(x, y, z) + \mu\varphi'_{2y}(x, y, z) = 0 \\ F'_z = f'_z(x, y, z) + \lambda\varphi'_{1z}(x, y, z) + \mu\varphi'_{2z}(x, y, z) = 0 \\ F'_\lambda = \varphi_1(x, y, z) = 0 \\ F'_\mu = \varphi_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

解出 (x, y, z) 的值, 带入 $f(x, y, z)$ 中即可。

考点 51. 复合函数微分法

设函数 $z = f(u, v)$ 可微, $u = u(x, y), v = v(x, y)$ 具有一阶偏导数, 并且它们可以构成 z 关于 (x, y) 在某区域 D 内的复合函数, 则在 D 内有复合函数求导法则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

考点 52. 二重积分的概念和性质

(1) 二重积分的定义

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$$

几何意义: 当连续函数 $z = f(x, y) \geq 0$ 时, 二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 表示曲顶柱体的体积。

(2) 二重积分的性质

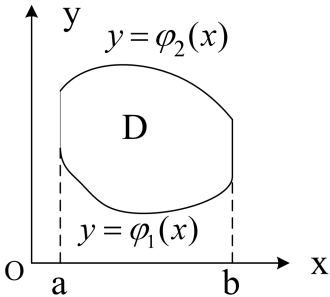
$$\textcircled{1} \iint_D kf(x, y) d\sigma = k \iint_D f(x, y) d\sigma \quad (k \text{ 为常数})$$

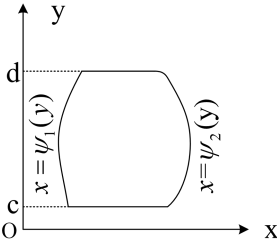
$$\textcircled{2} \iint_D [f(x, y) \pm g(x, y)] d\sigma = \iint_D f(x, y) d\sigma \pm \iint_D g(x, y) d\sigma$$

$$\textcircled{3} \iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma$$

其中 $D = D_1 \cup D_2$, 除公共边界外, D_1 与 D_2 不重叠。

考点 53. 直角坐标系下的二重积分

X 型	$D: \begin{cases} \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \\ a \leq x \leq b \end{cases}$  $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$
-----	--

Y 型	$D:\begin{cases} \psi_1(y)\leq x\leq \psi_2(y) \\ c\leq y\leq d \end{cases}$  $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$
-----	--

注意：二重积分的奇偶对称性

- ①若积分区域关于 X 轴对称，被积函数是关于 y 的奇函数，则二重积分为 0
- ②若积分区域关于 Y 轴对称，被积函数是关于 x 的奇函数，则二重积分为 0

考点 54.极坐标系下的二重积分

设 $D:\begin{cases} \varphi_1(\theta)\leq r\leq \varphi_2(\theta) \\ \alpha\leq \theta\leq \beta \end{cases}$, 则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\varphi(\theta)}^{\phi(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$$

第五章 无穷级数

考点 55.常数项级数的概念

定义 给定一个数列 $u_1,u_2,u_3\cdots u_n\cdots$, 将各项依次相加, 简记为 $\sum_{n=1}^\infty u_n$, 即 $\sum_{n=1}^\infty u_n=u_1+u_2+\cdots u_n+\cdots$ 称上式为无穷级数,

其中第 n 项 u_n 叫做级数的一般项, 级数的前 n 项和。

$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n (n=1,2,3,\cdots)$, 称为级数的部分和。

若 $\lim_{n\rightarrow\infty} S_n = S$, 则称级数 $\sum_{n=1}^\infty u_n$ 是收敛的, 并称 S 为级数的和, 记以 $\sum_{n=1}^\infty u_n = S$ 。

若 $\lim_{n\rightarrow\infty} S_n$ 不存在, 则称级数 $\sum_{n=1}^\infty u_n$ 是发散的。

考点 56.几种特殊级数的敛散性

(1) 等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \Rightarrow \begin{cases} |q| < 1 & \text{级数收敛} \\ |q| \geq 1 & \text{级数发散} \end{cases}$

(2) p -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} (p > 0) \Rightarrow \begin{cases} p > 1 & \text{级数收敛} \\ p \leq 1 & \text{级数发散} \end{cases}$

(3) 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散

考点 57. 无穷级数的基本性质

性质 1 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S , 则 $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$ 也收敛, 其和为 CS 。

性质 2 设有两个收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛, 其和为 $S \pm \sigma$ 。

性质 3 在级数前面加上或去掉有限项, 不会改变级数的收敛性。

性质 4 收敛级数加括号所得到的新级数仍收敛于原级数的和。

性质 5 (级数收敛的必要条件) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则它的一般项 u_n 趋近于零, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 。

考点 58. 正项级数审敛法

(1) 比值判别法 (达朗贝尔判别法)

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, 则

①当 $\rho < 1$ 时, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

②当 $\rho > 1$ (包括 $\rho = +\infty$) 时, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

③当 $\rho = 1$ 时, 此判别法无效。

(注: 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ 不存在时, 此判别法也无法用。)

(2) 正项级数的比较判别法

比较审敛法的极限形式: 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数,

①如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l (0 \leq l < +\infty)$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

②如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l > 0$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \infty$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

考点 59. 交错级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n (u_n > 0)$$

莱布尼兹审敛法

若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$, ($u_n > 0$) 满足条件:

① $u_{n+1} \leq u_n (n = 1, 2, \dots)$;

② $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

则交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛。

考点 60. 绝对收敛和条件收敛

(1) 绝对收敛: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛。

(2) 条件收敛: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛。

(3) 定理 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必定收敛。

考点 61. 函数项级数

(1) 函数项级数的概念:

设 $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ 是定义区间 I 上的函数列, 则称 $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 为定义在区间 I 上的

函数项级数。

若 $x_0 \in I$, 常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛, 则称 x_0 为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛点, 反之为发散点, 所有的收敛点的全称为收敛域,

发散点的全称为发散域。

函数项级数在收敛域内有和, 在收敛域上, 函数项级数的和是 x 的函数 $s(x)$, 通常称 $s(x)$ 为函数项级数的和函数, 这函数的定义域就是级数的收敛域。

考点 62. 幂级数的收敛半径、收敛区间与收敛域

(1) 幂级数的概念

定义 形如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$ 或 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ 的函数项级数称为**幂级数**, $a_n (n = 0, 1, 2, \cdots)$ 称为幂级数的系数。

(2) 收敛半径和收敛域

如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 不仅在 $x = 0$ 一点处收敛, 也不是在整个数轴上都收敛, 则必有一完全确定的正数 R 存在, 且有

以下性质:

当 $|x| < R$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛;

当 $|x| > R$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散;

当 $x = R$ 或 $x = -R$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 可能收敛也可能发散。

称正数 R 为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的**收敛半径**。

如果 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 仅在 $x = 0$ 点收敛, 则记 $R = 0$

如果 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在整个数轴上都收敛, 则记 $R = +\infty$

(3) 幂级数的收敛半径, 收敛区间, 收敛域

定理: 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$, 其中 a_n, a_{n+1} 是该幂级数相邻两项的系数, 则**收敛半径**为

(1) 当 $\rho \neq 0$ 时, $R = \frac{1}{\rho}$;

(2) 当 $\rho = 0$ 时, $R = \infty$; (在整个数轴上都收敛)

(3) 当 $\rho = \infty$ 时, $R = 0$ (仅在 $x = 0$ 处收敛)

设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R(0 < R < +\infty)$, 则收敛区间为 $(-R, R)$, 再讨论 $x = \pm R$ 处的收敛性来确定 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛

域为下列区间的哪一个:

$$(-R, +R), [-R, +R], [-R, +R), (-R, +R]$$

(4) 和函数的性质

性质 1 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛域 I 上连续。

性质 2 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛域 I 上可积, 并有逐项积分公式

$$\int_0^x s(x) dx = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} (x \in I)$$

性质 3 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛区间 $(-R, R)$ 内可导, 且有逐项求导公式

$$s'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (|x| < R)$$

考点 63. 函数的幂级数展开

(1) 泰勒级数

设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处任意阶可导,

$$\text{则级数 } f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n,$$

称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的泰勒级数。

(2) 麦克劳林级数

若当 $x = 0$ 时, 则级数 $f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n$ 称 $f(x)$ 的麦克劳林级数。

(3) 常见的麦克劳林级数

$$\textcircled{1} \frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + \cdots, x \in (-1, 1)$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, x \in (-1, 1)$$

③ $e^x = 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$

④ $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$

⑤ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$

⑥ $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \cdots, x \in (-1, 1]$

⑦ $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} x^n \quad x \in (-1, 1)$

第六章 常微分方程

考点 64.一阶微分方程

微分方程类型及标准形式	通解求法
(1) 解可分离变量的微分方程 $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$	分离变量得 $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$ 两边积分得 $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$
(2) 齐次微分方程 $\frac{dy}{dx} = \phi(\frac{y}{x})$	令 $u = \frac{y}{x}$, 代入原方程得 $u + x \frac{du}{dx} = \phi(u)$ 分离变量: $\frac{du}{\phi(u) - u} = \frac{dx}{x}$ 两边积分, 得 $\int \frac{du}{\phi(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$ 积分后再用 $\frac{y}{x}$ 代替 u , 使得原方程的通解
(3) 一阶线性齐次微分方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$	通解 $y = Ce^{-\int P(x)dx}$
(4) 一阶线性非齐次微分方程 $\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)$	通解 $y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right]$

考点 65.二阶常系数齐次线性微分方程

(1) 二阶常系数齐次线性微分方程的标准形为: $y'' + py' + qy = 0$

①写出对应的特征方程 $r^2 + pr + q = 0$

②求出特征方程的特征根 r_1, r_2 , $r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$

③根据特征方程的两个根的不同情形, 按下列表格写出微分方程的通解

特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的两个 r_1, r_2	微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解
两个不相等的实根 r_1, r_2	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
两个相等的实根 $r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$
一对共轭复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

(2) 二阶常系数非齐次线性微分方程的特解

$f(x)$	特解形式
$f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$	$y^* = x^k Q_m(x) e^{\lambda x}$, 其中 $Q_m(x)$ 与 $P_m(x)$ 是同次多项式, k 按 λ 不是特征方程的根, 是特征方程的单根或者是重根依次取 0、1 或 2.
$f(x) = e^{\lambda x} [p_l(x) \cos \omega x + p_n(x) \sin \omega x]$	$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos \omega x + R_m^{(2)}(x) \sin \omega x]$, 其中多项式, $m = \max\{n, l\}$, k 按 $\lambda + i\omega$ 或者 $\lambda - i\omega$ 不是特征方程 $R_m^{(1)}(x)$, $R_m^{(2)}(x)$ 是 m 次的根或是特征方程的单根依次取 0、1